



# Images directes et fonctions L en cohomologie rigide

Jean-Yves Etesse

## ► To cite this version:

| Jean-Yves Etesse. Images directes et fonctions L en cohomologie rigide. 2007. hal-00262316

**HAL Id: hal-00262316**

**<https://hal.science/hal-00262316>**

Preprint submitted on 11 Mar 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# IMAGES DIRECTES ET FONCTIONS $L$ EN COHOMOLOGIE RIGIDE

Jean-Yves ETESSE <sup>1</sup>

hal-00262316, version 1 - 11 Mar 2008

---

<sup>1</sup>(CNRS - Institut de Mathématique, Université de Rennes 1, Campus de Beaulieu -  
35042 RENNES Cedex France)  
E-mail : Jean-Yves.Etesse@univ-rennes1.fr



Classification AMS : 11G, 11S40, 13B22, 13B35, 13B40, 14F20, 14F30, 14G10, 14G22, 14K, 14L05, 14L15.

Mots clés : Algèbres de Monsky-Washnitzer,  $(F)$ -cristaux,  $(F)$ -isocristaux convergents ou surconvergents, cohomologie cristalline, cohomologie rigide, cohomologie étale, cohomologie syntomique, fonctions  $L$ , schéma abélien ordinaire, groupe  $p$ -divisible ordinaire, cristal de Dieudonné.



## Résumé

Soient  $k$  un corps parfait de caractéristique  $p > 0$ ,  $\mathcal{V}$  un anneau de valuation discrète complet de corps résiduel  $k$  et corps des fractions  $K$  de caractéristique 0, et  $S$  un  $k$ -schéma séparé de type fini.

Lorsque  $S$  est lisse sur  $k$ , nous prouvons ici partiellement une conjecture de Berthelot portant sur la surconvergence des images directes du faisceau structural par un morphisme  $f : X \rightarrow S$  propre et lisse ; pour  $k$  parfait et  $\mathcal{V}$  modérément ramifié de telles images directes sont toujours convergentes non seulement pour le faisceau structural mais aussi pour (presque) tous les  $F$ -isocristaux convergents. Plus généralement, nous prouvons cette surconvergence lorsque  $f$  est relevable sur  $\mathcal{V}$ , ou que  $X$  est une intersection complète relative dans des espaces projectifs sur  $S$ , et en prenant pour coefficients des isocristaux surconvergentes quelconques.

Nous appliquons ensuite ces résultats aux fonctions  $L$  avec pour coefficients de telles images directes avec structure de Frobenius : nous en déduisons des propriétés de rationalité ou de méromorphie pour ces fonctions  $L$  (conjecture de Dwork), et nous étudions leurs zéros et pôles unités  $p$ -adiques (conjecture de Katz) ; un cas explicite concerne les schémas abéliens ordinaires.

Un exposé plus précis des résultats par chapitres est fourni dans l'introduction.

## Abstract

Let  $k$  be a perfect field of characteristic  $p > 0$ ,  $\mathcal{V}$  a complete discrete valuation ring with residue field  $k$  and field of fractions  $K$  of characteristic 0, and  $S$  a separated  $k$ -scheme of finite type.

When  $S$  is smooth over  $k$ , we partially prove here a conjecture of Berthelot about the overconvergence of the higher direct images of the structure sheaf under a proper smooth morphism  $f : X \rightarrow S$  ; when  $k$  is perfect and  $\mathcal{V}$  is tamely ramified such direct images are always convergent, not only for the structure sheaf but also for (almost) every convergent  $F$ -isocrystals. More generally, we prove this overconvergence when  $f$  is liftable over  $\mathcal{V}$ , or when  $X$  is a relative complete intersection in some projective spaces over  $S$ , and taking as coefficients any overconvergent isocrystals.

We then apply these results to  $L$ -functions with coefficients such direct images with Frobenius structure : we derive rationality or meromorphy for these  $L$ -functions (Dwork's conjecture), and we study their  $p$ -adic unit zeroes and poles (Katz's conjecture); and explicit case concerns the ordinary abelian schemes.

A more precise presentation of results by chapters is given in the introduction.

## Sommaire

0. Introduction.....	9
0.1. Relèvements et algèbres de Monsky-Washnitzer	
0.2. Espaces rigides analytiques et images directes	
0.3. $F$ -isocristaux convergents sur un schéma lisse, et images directes	
0.4. Images directes de $F$ -isocristaux surconvergents	
0.5. Cohomologie syntomique	
0.6. Fonctions $L$	
I. Relèvements et algèbres de Monsky-Washnitzer.....	17
1. Généralités.....	17
2. Des équivalences de catégories.....	23
3. Schémas formels et relèvements de schémas.....	26
II. Espaces rigides analytiques et images directes.....	47
1. Changement de base pour un morphisme propre.....	48
2. Sorites sur les voisinages stricts.....	58
3. Images directes d'isocristaux.....	70
3.1. Sections surconvergentes.....	70
3.2. Définition des images directes.....	73
3.3. Changement de base.....	74
3.4. Surconvergence des images directes.....	78
III. $F$ -isocristaux convergents sur un schéma lisse, et images directes...99	
1. $F$ -isocristaux convergents sur un schéma affine et lisse.....	99
1.1. Notations.....	99
1.2. Des équivalences de catégories.....	102
2. $F$ -isocristaux convergents sur un schéma lisse formellement relevable.....	106
2.1. Espaces rigides associés aux schémas formels.....	106
2.2. $F$ -isocristaux convergents et $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_K}$ -modules.....	108
3. Images directes de $F$ -isocristaux convergents.....	110
3.1. Relèvements de Teichmüller.....	110
3.2. Amplitude des $F$ -isocristaux.....	112
3.3. Convergence des images directes.....	113



3.4. Fibres des $F$ -isocristaux convergents .....	126
3.5. Cas fini étale.....	127
IV. Images directes de $F$ -isocristaux surconvergents .....	131
1. Frobenius .....	131
2. Cas relevable.....	134
3. Cas propre et lisse .....	144
4. Cas fini étale.....	149
5. Cas plongeable.....	158
V. Cohomologie syntomique.....	161
1. Site syntomique.....	161
2. Cohomologie syntomique à supports compacts.....	167
3. Comparaison avec cohomologie étale et cohomologie rigide...	172
VI. Fonctions $L$ .....	183
1. Fonction $L$ des $F$ -modules convergents ou surconvergents....	183
1.1. Relèvements de Teichmüller.....	183
1.2. $F$ - modules convergents.....	183
1.3. $F$ - modules surconvergents.....	187
1.4. La conjecture de Dwork pour les $F$ - modules surconvergents.....	189
2. Fonction $L$ des $F$ -isocristaux convergents ( resp. $F$ -cristaux).	191
2.1. $F$ -isocristaux convergents.....	191
2.2. $F$ -cristaux.....	195
3. Fonction $L$ des $F$ -isocristaux Dwork-surconvergents .....	196
3.1. $F$ -isocristaux Dwork-surconvergents.....	196
3.2. Fonction $L$ des $F$ -isocristaux Dwork-surconvergents .....	198
4. Fonction $L$ des $F$ -isocristaux surconvergents.....	199
4.1. Définitions.....	199
4.2. La conjecture de Dwork.....	202
4.3. La conjecture de Katz.....	202
5. Schémas abéliens ordinaires .....	205
5.1. $F$ -cristaux ordinaires.....	205
5.2. Caractérisation des schémas abéliens ordinaires.....	206
5.3. Explicitation des fonctions $L_\alpha^{(r)}$ et conjecture de Dwork..	212
Bibliographie.....	215

# 0. Introduction

## 0.1. Relèvements et algèbres de Monsky-Washnitzer

Le chapitre I, qui rassemble un certain nombre de résultats généraux, est largement préparatoire pour les autres chapitres.

On développe au §1 un formalisme qui aboutira au §2 à préciser les liens entre le complété faible  $A^\dagger$  d'une  $\mathcal{V}$ -algèbre de type fini  $A$  et le complété  $\hat{A}$ , où  $\mathcal{V}$  est excellent : par exemple, si  $A^\dagger$  est réduit, alors  $A^\dagger$  est intégralement fermé dans  $\hat{A}$  [théo (2.2)], ce qui est l'analogie d'un théorème de Bosch, Dwork et Robba.

On généralise, avec les théorèmes (2.3) et (2.4), des résultats de [Et 4] en prouvant la pleine fidélité du foncteur de la catégorie des  $A^\dagger$ -algèbres étales vers la catégorie des  $\hat{A}$ -algèbres étales : ce foncteur est une équivalence de catégories en se restreignant aux algèbres finies étales, et un foncteur quasi-inverse est fourni par le passage à la fermeture intégrale [théo (2.4)].

Le §3 rassemble des résultats de relèvement de schémas, de la caractéristique  $p > 0$  à la caractéristique 0, qui nous serviront, aux chapitres II, III, IV, à établir la convergence ou la surconvergence des images directes d'isocristaux dans les cas relevables : sur une base affine, les deux cas les plus importants seront celui d'un morphisme fini [théo (3.4)], avec son utilisation ultérieure au IV pour relever le Frobenius via [cor (3.6)], et celui d'un morphisme projectif lisse [théo (3.3)] et son corollaire [cor (3.3.7)] pour les intersections complètes, ou plus particulièrement d'un morphisme fini étale [théo (3.1)], ou fini étale galoisien [cor (3.7)].

## 0.2. Espaces rigides analytiques et images directes

Dans le chapitre II on définit les images directes d'isocristaux surconvergens par un morphisme  $f : X \rightarrow S$  et on prouve leur surconvergence dans le cas où  $f$  est propre et lisse relevable, ou  $X$  est une intersection complète relative dans des espaces projectifs sur  $S$ .

L'outil essentiel pour ce dernier résultat est le théorème de changement de base propre du §1 : on établit celui-ci d'abord dans le cadre des schémas formels [théo (1.1)], puis dans le cadre des espaces rigides analytiques [théo (1.2)] grâce aux travaux de Bosch et Lütkebohmert.

La notion de voisinage strict étant étroitement liée à celle de surconvergence des isocristaux, on développe au §2 quelques propriétés de ces voisinages stricts dans le cas plongeable : dans le cas cartésien, l'image inverse d'un système fondamental de voisinages stricts est un système fondamental de voisinages stricts [prop (2.2.3)] ; le même résultat vaut pour un morphisme fini et plat, ou fini étale, ou fini étale galoisien [prop (2.3.1)].

Après avoir rappelé au §3 la définition des images directes d'isocristaux surconvergens donnée par Berthelot dans une note non publiée [B 5] (voir les articles [C-T], [LS] de Chiarellotto-Tsuzuki et Le Stum pour la publication des détails), on établit leur surconvergence pour un morphisme propre et lisse relevable, en même temps que le théorème de changement de base [théo (3.4.4)] : un ingrédient essentiel est l'extension aux voisinages stricts du théorème de changement de base propre [théo (3.3.2)].

Des résultats de relèvement du chapitre I on déduit alors la surconvergence des images directes d'un isocristal surconvergent par un morphisme  $f : X \rightarrow S$  projectif et lisse, où  $S$  est lisse sur le corps de base  $k$  et  $X$  relevable en un  $\mathcal{V}$ -schéma plat [théo (3.4.8.2)] (resp  $X$  est une intersection relative dans des espaces projectifs sur  $S$  [cor (3.4.8.6)]). Une variante, étudiée dans le théorème (3.4.9), ramène la preuve de la surconvergence du cas projectif lisse au cas où la base  $S$  est affine et lisse sur  $k$ .

Ces théorèmes (3.4.8.2), (3.4.8.6) et (3.4.9) [resp. le théo (3.4.4)] résolvent partiellement une conjecture de Berthelot [B 2] sur la surconvergence des images directes : dans le chapitre IV nous en donnons une version avec structure de Frobenius.

Dans le cas où la base  $S$  est une courbe affine et lisse sur un corps algébriquement clos  $k$  (resp.  $S$  est une courbe lisse sur un corps parfait  $k$ ) la conjecture a été prouvée pour le faisceau structural par Trihan [Tri] (resp. Matsuda et Trihan [M-T]) ; dans le cas relevable, la conjecture a aussi été prouvée indépendamment par Tsuzuki par des voies différentes [Tsu 4].

### 0.3. $F$ -isocristaux convergents sur un schéma lisse, et images directes

Avec le chapitre III on introduit une structure de Frobenius sur les isocristaux considérés, tout en restant dans le cadre «convergent». Les résultats concernent deux aspects de la théorie : d'une part l'allure des  $F$ -isocristaux convergents sur un schéma lisse aux §1 et §2, d'autre part la convergence des images directes par un morphisme propre et lisse  $f : X \rightarrow S$  au §3.

Au §1 on obtient une description des  $F$ -isocristaux convergents sur un schéma affine et lisse [cor (1.2.3)] qui est l'analogue de celle de type Monsky-Washnitzer obtenue par Berthelot dans le cas surconvergent [B 3]. Cette description s'étend au cas lisse relevable dans le §2 [théo (2.2.1)].

L'un des ingrédients essentiels au §3 est le passage par la cohomologie cristalline et l'utilisation des objets «consistants» au sens de Berthelot-Ogus [B-O] : dans ce cas on est amené à supposer le corps  $k$  parfait, l'indice de ramification  $e$  plus petit que  $p-1$  et à se limiter aux cristaux plats pour pouvoir appliquer le théorème de changement de base en cohomologie cristalline.

Avec les restrictions précédentes on obtient la convergence des images directes dans le cas propre et lisse, et le théorème de changement de base : si le morphisme propre et lisse  $f : X \rightarrow S$  est relevable en un morphisme propre et lisse sur  $\mathcal{V}$ , on peut lever la restriction de platitude [théo (3.3.1)]. En fait, si le morphisme  $f : X \rightarrow S$  est projectif et lisse et que, ou bien  $f$  est relevable, ou bien que  $X$  est une intersection complète relative dans des espaces projectifs sur  $S$ , alors on peut lever toutes les restrictions précédentes (i.e. sur l'indice de ramification, sur la platitude et la perfection de  $k$ ) [théo (3.3.2)] : la preuve n'utilise pas la cohomologie cristalline, mais repose sur le cas plongeable du [II, 3.4]. De plus les images directes commutent au passage aux fibres [prop (3.4.4)]. Dans le cas fini étale toutes les restrictions

précédentes sont levées [théo (3.5.1)], et dans le cas galoisien la cohomologie convergente commute aux points fixes sous le groupe du revêtement [théo (3.5.1)].

## 0.4. Images directes de $F$ -isocristaux surconvergens

Au chapitre IV on étudie les images directes des  $F$ -isocristaux dans le cadre «surconvergent». Tout le problème est d'obtenir de «bons» relèvements du Frobenius.

Sur la base  $S$ , la question est résolue par le diagramme (1.2.4), qu'il s'agit ensuite de «tirer en haut» par le morphisme propre et lisse  $f : X \rightarrow S$ .

Dans le cas où  $f$  est relevable on arrive à effectuer en parallèle des relèvements du Frobenius et des bons choix de compactifications. D'où le théorème de surconvergence des images directes dans le cas relevable [théo (2.1)] : le point clé est de montrer que le Frobenius, sur les images directes surconvergentes, est un isomorphisme ; par le théorème de changement de base on est ramené à la même propriété dans le cas convergent vu au [III, (3.3.1)]. Dans le cas où  $f$  est projectif lisse relevable, ou  $X$  intersection complète relative dans des espaces projectifs sur  $S$ , abordés au §3, ou fini étale au §4, on construit comme au II §3 des foncteurs  $R^i f_{rig*}$  sur la catégorie des  $F$ -isocristaux surconvergens [théos (3.1), (4.1)].

Lorsque  $f$  est propre et lisse et ou bien génériquement projectif relevable, ou bien génériquement projectif et  $X$  intersection complète relative dans des espaces projectifs sur  $S$ , on utilise les résultats du III : on est ainsi amené à supposer  $k$  parfait,  $e \leq p - 1$  et à se restreindre à des  $F$ -isocristaux plats. Grâce aux propriétés de descente étale des  $F$ -isocristaux surconvergens de [Et 5] et de pleine fidélité du foncteur d'oubli de la catégorie surconvergente vers la catégorie convergente de Kedlaya [Ked 2], on prouve encore la surconvergence des images directes [théo (3.2)].

Dans le §5, où  $f$  est supposé seulement plongeable, on procède différemment : comme il n'y a plus de relèvements globaux du Frobenius comme précédemment on utilise la fonctorialité des images directes pour construire un morphisme de Frobenius ; il reste alors à prouver que c'est un isomorphisme. Par un

résultat de Berthelot il suffit de voir que tel est le cas dans la catégorie convergente : le théorème de changement de base et un résultat de Bosch-Güntzer-Remmert [B-G-R] nous ramène à le vérifier aux points fermés de  $S$ , pour lesquels l'assertion est connue [III, (3.3.1.18)]. Pour  $f$  plongeable on a ainsi des foncteurs images directes sur la catégorie des  $F$ -isocristaux surconvergens [théo (5.2)].

## 0.5. Cohomologie syntomique

La cohomologie syntomique introduite au chapitre V fait le lien entre la cohomologie étale et la cohomologie rigide, lien qui sera utilisé au chapitre VI pour résoudre une conjecture de Katz sur les zéros et pôles unités  $p$ -adiques des fonctions  $L$ .

Comme pour le topos étale [Mi, II, theo 3.10] on obtient au §1 une description du topos syntomique [théo (1.3)] calquée sur celle de [SGA 4, T 1, IV, théo (9.5.4)], SGA 4 qui travaille en termes de sous-topos ouvert et du sous-topos fermé complémentaire. On en déduit les suites exactes courtes usuelles de localisation [théo (1.5)].

Au §2 la cohomologie syntomique à supports compacts est définie : en particulier il faut s'assurer de l'indépendance par rapport à la compactification choisie [prop (2.1)]. Les suites exactes courtes de localisation du §1 fournissent alors la suite exacte longue de localisation en cohomologie syntomique à supports compacts [théo (2.6)].

Au §3 on établit que les cohomologies syntomique et étale à supports compacts d'un faisceau lisse  $\mathcal{F}$  coïncident [théo (3.2)]. De même la cohomologie rigide à supports compacts d'un  $F$ -isocristal surconvergent unité  $E$  associé à  $\mathcal{F}$  coïncide avec une limite de la cohomologie syntomique à supports compacts d'un  $E_n^{m-cris}$  associé à  $\mathcal{F}$  [théo (3.3.13)(1) et (3.3.16)]. Comme il existe une suite exacte courte sur le site syntomique qui relie  $\mathcal{F}$  et  $E_n^{m-cris}$  [théo (3.3.12)], on en déduit que la cohomologie étale à supports compacts de  $\mathcal{F}$  s'identifie aux points fixes du Frobenius agissant sur la cohomologie rigide à supports compacts de  $E$  [théo(3.3.13) (2) et (3)].

## 0.6. Fonctions $L$

Dans le chapitre VI on donne une définition unifiée des fonctions  $L$  des  $F$ -modules (resp.  $F$ -isocristaux) convergents ou surconvergents et des  $F$ -cristaux : elle redonne celle utilisée en cohomologie cristalline par Katz [K 1] ou [Et 2], ou celle en cohomologie rigide de [E-LS 1], ou celle utilisée par Wan [W 2]. Le but ici est d'obtenir des propriétés de méromorphie ou de rationalité de ces fonctions  $L$  (conjecture de Dwork) et d'étudier leurs zéros et pôles unités  $p$ -adiques (conjecture de Katz) ; on explicite ces résultats pour les schémas abéliens ordinaires au §5.

Au §1 les résultats de Wan permettent d'établir la méromorphie attendue pour les fonctions  $L$  de  $F$ -modules surconvergents.

Au §2 la définition des fonctions  $L$  des  $F$ -isocristaux convergents donne une forme globale des fonctions  $L$  des  $F$ -modules convergents du §1, et généralise les fonctions  $L$  des  $F$ -cristaux du cas cristallin [Et 2], et les fonctions  $L$  des  $F$ -isocristaux surconvergents du cas rigide [E-LS 1] : si  $e \leq p-1$ , on obtient la rationalité des fonctions  $L$  des images directes du faisceau structural par un morphisme propre et lisse [théo (2.1.4)].

Au §3 on introduit la notion de  $F$ -isocristaux Dwork-surconvergents : il s'agit des  $F$ -isocristaux convergents dont le Frobenius est surconvergent. Contrairement aux  $F$ -isocristaux surconvergents on n'y suppose pas la connexion surconvergente ; mais la surconvergence du Frobenius suffit à assurer la méromorphie  $p$ -adique des fonctions  $L_\alpha^{(r)}$  [théo (3.2.10)], ce qui prouve la conjecture de Dwork pour de tels coefficients.

Au §4 les fonctions  $L_\alpha^{(r)}$  d'un  $F$ -isocristal surconvergent  $E$  sont définies comme étant celles du  $F$ -isocristal convergent  $\mathcal{E}$  associé : un  $F$ -isocristal surconvergent fournit un  $F$ -isocristal Dwork-surconvergent par oubli de la surconvergence de la connexion, ainsi, grâce au §3, la méromorphie de  $L_\alpha^{(r)}(E)$  est établie [théo (4.2.1)(i)] ; la rationalité de  $L^{(r)}(E)$  résulte de la cohomologie rigide [théo (4.2.1)(ii)].

En utilisant les résultats du IV et du V de surconvergence des images directes on en déduit la méromorphie de

$$L_\alpha^{(r)}(R^i f_{rig*}(E)) \quad (4.3.2.3)$$

et la rationalité de

$$L^{(r)}(R^i f_{rig*}(E)) \quad (4.3.2.2) .$$

Toujours dans ce §4 on aborde la preuve de la conjecture de Katz dans le cas surconvergent [théo (4.3.1)] : on y lève l'hypothèse de prolongement à une compactification qui avait été faite dans [E-LS 2; théo 6.7], grâce aux suites exactes en cohomologie syntomique à supports compacts du  $V$  [V, (3.3.13)(2)], tout en précisant la preuve de Emerton et Kisin [(4.3.1.3)].

On explicite au §5 les conséquences des résultats précédents pour les schémas abéliens ordinaires. Nous avons adopté la définition d'ordinarité d'un morphisme de Illusie [Il 2], celle d'ordinarité d'un groupe  $p$ -divisible de Raynaud [R 3], et celle d'ordinarité d'un  $F$ -cristal de Katz et Deligne [K 2] et [Del 2]. Si  $f : X \rightarrow S$  est un schéma abélien, on note  $G$  le groupe  $p$ -divisible associé et  $\mathbb{D}(G)$  son  $F$ -cristal de Dieudonné : tout d'abord il est équivalent de dire que  $X/S$  est ordinaire, ou que  $G$  est ordinaire, ou que  $\mathbb{D}(G)$  est ordinaire [théo (5.2.9)]. Pour un schéma abélien ordinaire  $f : X \rightarrow S$  on a des descriptions des fonctions  $L$  suivantes

$$L_\alpha(R^i f_{cris*}(\mathcal{O}_{X/W})) , \quad L_\alpha^{(r)}(R^i f_{cris*}(\mathcal{O}_{X/W}))$$

en termes de fonctions  $L$  usuelles associées aux cristaux de Dieudonné des groupes  $p$ -divisibles  $G^{ét}$  et  $G^{tm}$  provenant de  $G$  [théo (5.3.1)].

*Remerciements.* L'auteur tient ici à remercier P. Berthelot et B. Le Stum pour avoir mis à sa disposition leurs preprints [B 5] et [LS], ainsi que M.-F. Chériaux pour l'aide apportée à la frappe du manuscrit.





# I. Relèvements et algèbres de Monsky-Washnitzer

## 1. Généralités

### 1.0. Notations

Tous les anneaux considérés dans cet article sont (sauf mention du contraire) commutatifs et unitaires.

Soient  $\mathcal{V}$  un anneau noethérien,  $I \subsetneq \mathcal{V}$  un idéal,  $A$  une  $\mathcal{V}$ -algèbre telle que l'anneau  $A$  soit noethérien et  $IA \neq A$ . On note  $\hat{A}$  le séparé complété  $I$ -adique de  $A$ ,  $A_n = A/I^{n+1}A$  et  $A^\dagger \subset \hat{A}$  le complété faible de  $A$  au-dessus de la paire  $(\mathcal{V}, I)$  [M-W, § 1] : on désignera toujours par un indice  $(\ )_0$  la réduction mod  $I$  d'une  $\mathcal{V}$ -algèbre ou d'un  $\mathcal{V}$ -morphisme.

Si  $B$  est une  $\mathcal{V}$ -algèbre, on dit que  $B$  est faiblement complète de type fini (f.c.t.f. en abrégé) si  $B$  est la complétée faible d'une  $\mathcal{V}$ -algèbre de type fini ; une telle algèbre  $B$  est appelée “w.c.f.g.” dans la terminologie de [M-W, § 2].

Considérons la partie multiplicative  $T = 1 + IA$  de  $A$  ; notons  $A_T = T^{-1}A$  et  $(\tilde{A}, \tilde{I})$  le hensélisé de  $(A, IA)$  au sens de Raynaud [R 2, déf 4 p 24] : rappelons qu'on a supposé  $IA \neq A$ , si bien que  $0 \notin T$  ; sinon les anneaux  $A_T, \tilde{A}, \hat{A}$  et  $A^\dagger$  seraient égaux à  $\{0\}$ .

On rappelle [Et 4] que si  $A$  est une  $\mathcal{V}$ -algèbre de type fini, alors il existe des morphismes canoniques  $A_T \rightarrow \tilde{A} \rightarrow A^\dagger \rightarrow \hat{A}$  tous fidèlement plats et que tous ces anneaux ont même séparé complété  $I$ -adique égal à  $\hat{A}$ .

**Proposition (1.1).** *Soient  $A, \mathcal{A}, \mathcal{B}$  des anneaux noethériens munis de morphismes*

$$A \xrightarrow{\varphi_1} \mathcal{A} \xrightarrow{\varphi_2} \mathcal{B} \xrightarrow{\varphi_3} \hat{A}$$

*avec  $\varphi_3$  fidèlement plat. On suppose que  $\mathrm{Spec} \hat{A} \longrightarrow \mathrm{Spec} A$  est un morphisme normal (resp. régulier) [EGA IV, (6.8.1)] : cette dernière hypothèse*

est vérifiée si  $A$  est excellent. Alors :

(1) Le morphisme

$$h = \text{Spec } (\varphi_2 \circ \varphi_1) : \text{Spec } \mathcal{B} \rightarrow \text{Spec } A$$

est normal (resp. régulier).

(2) Si de plus  $\varphi_2$  est plat, alors

$$f = \text{Spec } (\varphi_2) : \text{Spec } \mathcal{B} \rightarrow \text{Spec } \mathcal{A}$$

est un morphisme normal.

(3) Si  $\varphi_2$  est plat et  $(\mathcal{A}, I\mathcal{A})$  est un couple hensélien tel que  $\hat{\mathcal{A}} \simeq \hat{A}$ , alors

$$f : \text{Spec } \mathcal{B} \rightarrow \text{Spec } \mathcal{A}$$

est un morphisme normal à fibres géométriquement intègres.

(4) Si  $\varphi_2$  est plat,  $(\mathcal{A}, I\mathcal{A})$  est un couple hensélien tel que  $\hat{\mathcal{A}} \simeq \hat{A}$  et  $\mathcal{A}$  est réduit, alors  $\mathcal{A}$  est intégralement fermé dans  $\mathcal{B}$  et dans  $\hat{A}$ .

*Démonstration.* Le (1) résulte de [EGA IV, (6.5.4) (i) (resp. (6.5.2) (i))].

Pour le (2) notons  $g = \text{Spec } \varphi_1 : \text{Spec } \mathcal{A} \rightarrow \text{Spec } A$ . Soit  $\mathfrak{q} \in \text{Spec } \mathcal{A}$  et  $k'$  une extension finie du corps résiduel  $k(\mathfrak{q})$  : il s'agit de montrer que

$$f^{-1}(\mathfrak{q})_{k'} = \text{Spec } (k' \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B})$$

est normal [EGA IV, (6.8.1)]. Comme  $\text{Spec } k'$  est normal et  $h$  un morphisme normal, on sait par [EGA IV, (6.14.1)] que  $\text{Spec } (k' \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B})$  est normal.

Considérons les applications

$$\begin{array}{ccc} k' \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B} & \xrightarrow{\psi} & k' \otimes_A \mathcal{B} \simeq k' \otimes_{\mathcal{A}} (\mathcal{A} \otimes_A \mathcal{B}) \xrightarrow{\varphi} k' \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B} \\ x \otimes b & \longmapsto & x \otimes (1_{\mathcal{A}} \otimes b) \\ & & x \otimes (a \otimes b) \longmapsto x \otimes (\varphi_2(a).b); \end{array}$$

clairement  $\varphi \circ \psi = \text{Id}$ . Pour  $\mathfrak{p} \in \text{Spec } (k' \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B})$ ,  $\mathfrak{m} := \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$  on a  $\mathfrak{p} = \psi^{-1}(\varphi^{-1}(\mathfrak{p})) = \psi^{-1}(\mathfrak{m})$  et  $\psi$  et  $\varphi$  induisent des morphismes

$$(k' \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B})_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{\psi'} (k' \otimes_A \mathcal{B})_{\mathfrak{m}} \xrightarrow{\varphi'} (k' \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B})_{\mathfrak{p}}$$

dont le composé est encore l'identité.

Par hypothèse  $\mathcal{D} := (k' \otimes_A \mathcal{B})_{\mathfrak{m}}$  est intégralement clos, de corps des fractions noté  $L$ ; en particulier  $\mathcal{C} := (k' \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B})_{\mathfrak{p}}$  est intègre : notons  $K$  son corps des fractions. Il s'agit de montrer que  $\mathcal{C}$  est intégralement clos : soit  $x \in K$  un élément entier sur  $\mathcal{C}$ , annulé par le polynôme  $R(X) = X^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i$ ,  $a_i \in \mathcal{C}$ .

L'injection  $\psi'$  induit une injection :

$$\psi'' : K \hookrightarrow L ;$$

puisque  $\mathcal{D}$  est intégralement clos on a  $\psi''(x) \in \mathcal{D}$  et  $x_1 := \varphi'(\psi''(x)) \in \mathcal{C}$  est racine de  $R(X)$  : en effet  $\psi''$  induit  $\tilde{\psi}'' : K[K] \rightarrow L[X]$ ,  $R(X) \mapsto \tilde{R}(X) \in \mathcal{D}[X]$  et  $\varphi'$  induit  $\tilde{\varphi}' : \mathcal{D}[X] \rightarrow \mathcal{C}[X]$ ,  $\tilde{R}(X) \mapsto R(X)$ . D'où  $R(X) = (X - x_1)R_1(X)$  avec  $R_1(X) \in \mathcal{C}[X]$ . Si  $x = x_1$  on a terminé, sinon  $x$  est racine de  $R_1(X)$  et on itère : finalement  $x \in \mathcal{C}$ , donc  $\mathcal{C}$  est intégralement clos, i.e.  $f^{-1}(\mathfrak{q})_{k'}$  est normal.

Pour le (3), on sait par le (2) que le morphisme  $g : \text{Spec } \hat{\mathcal{A}} = \text{Spec } \hat{A} \rightarrow \text{Spec } \mathcal{A}$  est normal, donc ses fibres sont géométriquement intègres par un théorème de Raynaud [R 2, théo 3, p.126]. Or  $\hat{A}$  est une  $\mathcal{B}$ -algèbre fidèlement plate, donc les fibres de  $f$  sont aussi géométriquement intègres.

Pour le (4), le théorème de Raynaud [loc. cit.] prouve que  $\mathcal{A}$  est intégralement fermé dans  $\hat{A}$  : comme  $\varphi_3$  est injectif,  $\mathcal{A}$  est aussi intégralement fermé dans  $\mathcal{B}$ .  $\square$

Pour la commodité des références nous avons rassemblé ci-après quelques lemmes qui résultent des EGA.

**Lemme (1.2).** *Soient  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  deux anneaux noethériens tels que  $\mathcal{B}$  soit une  $\mathcal{A}$ -algèbre. Les propriétés (i) et (ii) ci-après sont équivalentes :*

- (i)  *$\text{Spec } \mathcal{B} \rightarrow \text{Spec } \mathcal{A}$  est un morphisme régulier.*
- (ii) *Pour tout  $\mathfrak{q} \in \text{Spec } \mathcal{A}$  et tout  $\mathfrak{p} \in \text{Spec } \mathcal{B}$  au-dessus de  $\mathfrak{q}$ , le morphisme  $\mathcal{A}_{\mathfrak{q}} \rightarrow \mathcal{B}_{\mathfrak{p}}$  est formellement lisse pour les topologies pr adiques respectives (i.e. définies par  $\mathfrak{q}$   $\mathcal{A}_{\mathfrak{q}}$  et  $\mathfrak{p}$   $\mathcal{B}_{\mathfrak{p}}$  respectivement).*

*Démonstration.* En utilisant la définition d'un morphisme régulier [EGA IV, (6.8.1)], l'équivalence résulte de [EGA  $O_{IV}$ , (22.5.8) et (19.7.1)].  $\square$

**Lemme (1.3).** *Soient  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  deux anneaux noethériens tels que  $\mathcal{B}$  soit une  $\mathcal{A}$ -algèbre. Si  $\text{Spec } \mathcal{B} \rightarrow \text{Spec } \mathcal{A}$  est formellement lisse pour les topologies discrètes, alors c'est un morphisme régulier.*

*Démonstration.* Si  $\mathcal{B}$  est une  $\mathcal{A}$ -algèbre formellement lisse pour les topologies discrètes [EGA  $O_{IV}$ , (19.3.1)], alors pour tout  $\mathfrak{q} \in \text{Spec } \mathcal{A}$  et tout  $\mathfrak{p} \in \text{Spec } \mathcal{B}$  au-dessus de  $\mathfrak{q}$ , le morphisme

$$\mathcal{A}_{\mathfrak{q}} \rightarrow \mathcal{B}_{\mathfrak{p}}$$

est formellement lisse pour les topologies discrètes [EGA  $O_{IV}$ , (19.3.5)(iv)],

donc aussi pour les topologies préadiques sur  $\mathcal{A}_{\mathfrak{q}}$  et  $\mathcal{B}_{\mathfrak{p}}$  [EGA  $O_{IV}$ , (19.3.8)]; d'où la conclusion par le lemme (1.2).  $\square$

**Lemme (1.4).** *Soient  $\mathcal{A}$  un anneau,  $\mathcal{B}$  une  $\mathcal{A}$ -algèbre et  $\mathcal{J} \subset \mathcal{A}$  un idéal. Si  $\text{Spec } \mathcal{B} \rightarrow \text{Spec } \mathcal{A}$  est formellement lisse pour les topologies discrètes, alors c'est un morphisme formellement lisse pour les topologies  $\mathcal{J}$ -adiques sur  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$ .*

*Démonstration.* Via [EGA  $O_{IV}$ , (19.3.8)].  $\square$

**Lemme (1.5).** *Soient  $\mathcal{A}$  un anneau et  $S \subset \mathcal{A}$  une partie multiplicative. Alors*

- (i) *Le morphisme  $f : X = \text{Spec } (S^{-1}\mathcal{A}) \rightarrow \text{Spec } \mathcal{A} = Y$  est formellement étale pour les topologies discrètes.*
- (ii) *En particulier  $f$  est régulier si  $\mathcal{A}$  est noethérien.*
- (iii) *De plus :*
  - \* *si  $y \in Y \setminus f(X)$ , alors  $f^{-1}(y) = \emptyset$*
  - \* *si  $y \in f(X)$ , alors  $f$  induit un isomorphisme*

$$f^{-1}(y) \xrightarrow{\sim} \text{Spec } k(y).$$

*Démonstration.* La première assertion n'est autre que [EGA  $O_{IV}$ , (19.10.3) (ii)]; la deuxième en résulte grâce au lemme (1.3). La dernière assertion est conséquence de [Bour, AC II, § 2, n° 5, prop 11].  $\square$

**Lemme (1.6).** *Soient  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  deux anneaux noethériens tels que  $\mathcal{B}$  soit une  $\mathcal{A}$ -algèbre; notons*

$$f : \text{Spec } \mathcal{B} \rightarrow \text{Spec } \mathcal{A}$$

*le morphisme canonique. Alors :*

- (1) *On a les implications :*
  - (i)  *$f$  est réduit et  $\mathcal{A}$  réduit  $\Rightarrow \mathcal{B}$  réduit.*
  - (ii)  *$f$  normal et  $\mathcal{A}$  normal  $\Rightarrow \mathcal{B}$  normal.*
  - (iii)  *$f$  régulier et  $\mathcal{A}$  régulier  $\Rightarrow \mathcal{B}$  régulier.*
- (2) *Si  $f$  est fidèlement plat, on a les implications :*
  - (i)  *$\mathcal{B}$  réduit  $\Rightarrow \mathcal{A}$  réduit.*
  - (ii)  *$\mathcal{B}$  normal  $\Rightarrow \mathcal{A}$  normal.*
  - (iii)  *$\mathcal{B}$  régulier  $\Rightarrow \mathcal{A}$  régulier.*

*Démonstration.*

(1) (i) On utilise la définition d'un morphisme réduit [EGA IV, (6.8.1)] et la caractérisation des schémas noethériens réduits de [EGA IV, (5.8.5)] via les propriétés  $\ll R_0$  et  $S_1 \gg$  : comme  $\mathcal{A}$  vérifie  $\ll R_0$  et  $S_1 \gg$ , il en est de

même de  $\mathcal{B}$  via [EGA IV, (6.5.3) (ii) et (6.4.2)], donc  $\mathcal{B}$  est réduit.

Pour (ii) (resp. (iii)) on utilise [EGA IV, (6.5.4) (ii)] (resp. [EGA IV, (6.5.2) (ii)]).

(2) (i) Le fait qu'un schéma  $X$  est réduit s'exprime via les anneaux locaux  $\mathcal{O}_{X,x}$  [EGA IV, (4.1.4)] : le (i) résulte de [EGA IV, (2.1.13)].

Le (ii), c'est [EGA IV, (6.5.4) (i)] et le (iii) c'est [EGA IV, (6.5.2) (i)].  $\square$

La proposition suivante généralise des assertions de [Et 4, prop 2, prop 11].

**Proposition (1.7).** *Soient  $A$  une  $\mathcal{V}$ -algèbre (resp. une  $\mathcal{V}$ -algèbre de type fini) telle que  $A$  soit un anneau noethérien. Notons  $\mathcal{B}$  l'un des anneaux  $\tilde{A}, \hat{A}$  (resp.  $A^\dagger$ ). Alors*

- (1)  $A_T$  et  $\mathcal{B}$  sont des anneaux de Zariski.
- (2) On a les implications :
  - (i)  $A$  réduit  $\Rightarrow A_T$  réduit  $\Leftrightarrow \tilde{A}$  réduit.
  - (ii)  $A$  normal  $\Rightarrow A_T$  normal  $\Leftrightarrow \tilde{A}$  normal.
  - (iii)  $A$  régulier  $\Rightarrow \hat{A}$  régulier (resp.  $\Rightarrow A^\dagger$  régulier)  
 $\Rightarrow \tilde{A}$  régulier  $\Rightarrow A_T$  régulier.
  - (iv)  $A$  intégralement clos  $\Rightarrow A_T$  intégralement clos.
- (3) Si  $f_T : \text{Spec } \hat{A} \rightarrow \text{Spec } A_T$  est le morphisme canonique et  $f$  le composé  $f : \text{Spec } \hat{A} \xrightarrow{f_T} \text{Spec } A_T \rightarrow \text{Spec } A$ , on a l'implication  $f$  réduit (resp. normal; resp. régulier)  $\Rightarrow f_T$  réduit (resp. normal; resp. régulier).
- (4)
  - (i) Si  $f$  est réduit on a les implications :  
 $A$  réduit  $\Rightarrow A_T$  réduit  $\Leftrightarrow \mathcal{B}$  réduit.
  - (ii) Si  $f$  est normal on a les implications :  
 $A$  normal  $\Rightarrow A_T$  normal  $\Leftrightarrow \mathcal{B}$  normal.
  - (iii) Si  $f$  est régulier on a les implications :  
 $A$  régulier  $\Rightarrow A_T$  régulier  $\Leftrightarrow \mathcal{B}$  régulier.
  - (iv) Si  $f$  est normal on a les implications :  
 $A$  intégralement clos  $\Rightarrow A_T$  intégralement clos  $\Leftrightarrow \mathcal{B}$  intégralement clos.

*Démonstration.*

- (1)  $A_T$  est noethérien [Bour, AC II, § 2, n° 4, cor 2 de prop 10], de même que  $\tilde{A}$  [R 2, p 125] et  $\hat{A}$  [Bour, AC III, § 3, n° 4, prop 8]. De plus si  $A$  est de type fini sur  $\mathcal{V}$ , alors  $A^\dagger$  est noethérien [M-W, theo 2.1]. De plus par [Et 4, § 1] on a les inclusions  $IA_T \subset \text{Rad } A_T$ ,  $I\tilde{A} \subset \text{Rad } \tilde{A}$ ,  $IA^\dagger \subset \text{Rad } A^\dagger$ ,  $I\hat{A} \subset \text{Rad } \hat{A}$ ; donc les anneaux  $A_T$ ,  $\tilde{A}$ ,  $A^\dagger$  et  $\hat{A}$  sont de Zariski.
- (2) Grâce aux lemmes (1.5) et (1.3), l'implication

$A$  réduit (resp. normal; resp. régulier)  $\Rightarrow A_T$  de même,

résulte du [lemme (1.6), (1)] et l'équivalence

$A_T$  réduit (resp. normal)  $\Leftrightarrow \tilde{A}$  de même,

c'est [R 2, p 125].

Si  $A$  est régulier, alors  $\hat{A}$  l'est [EGA O<sub>IV</sub>, (17.3.8.1)] : par fidèle platitude de  $\hat{A}$  sur  $A^\dagger$ ,  $\tilde{A}$  et  $A_T$ , ces derniers sont aussi réguliers [EGA IV, (6.5.2)(i)].

Si  $A$  est intégralement clos, rappelons que  $0 \notin T$ , donc  $A_T$  est intègre de même corps des fractions que  $A$ , par suite  $A_T$  est intégralement clos [Bour, AC V, § 1, n° 5, prop 16].

- (3) Résulte du [lemme (1.5) (iii)] et de [EGA IV, (6.8.1)].
- (4) D'après le (2) et le (3) on est ramené à prouver le (4) en remplaçant  $A$  par  $A_T$  et  $f$  par le morphisme fidèlement plat  $f_T$ .

Les assertions (i) à (iii) sont fournies par le lemme (1.6).

Pour le (iv) supposons d'abord  $\mathcal{B}$  intégralement clos : par fidèle platitude de  $\mathcal{B}$  sur  $A_T$  on en déduit que  $\text{Spec } A_T$  est connexe, normal [EGA IV, (2.1.13)] et noethérien, donc  $A_T$  est intègre [EGA I, (4.5.6)] et intégralement clos par [Bour, AC II, § 3, n° 3, cor 4 du théo 1 et AC V, § 1, n° 2, cor de prop 8].

Réciproquement supposons  $\mathcal{A} := A_T$  intégralement clos : par fidèle platitude de  $\hat{A}$  sur  $\mathcal{B}$  il nous suffit de montrer que  $\hat{A} = \hat{\mathcal{A}}$  est intégralement clos. Puisque  $\mathcal{A}$  est intègre, l'idéal  $I\mathcal{A}$  est sans torsion, par suite  $\mathcal{A} = \bigcap_{\mathfrak{p}} \mathcal{A}_{\mathfrak{p}}$  et  $I\mathcal{A} = \bigcap_{\mathfrak{p}} I\mathcal{A}_{\mathfrak{p}}$  où  $\mathfrak{p}$  parcourt l'ensemble  $M$  des idéaux maximaux de  $\mathcal{A}$  [Bour, AC II, § 3, n° 3, cor 4 du théo 1]; comme  $\mathcal{A}/I\mathcal{A} \simeq A/I\mathcal{A} \neq \{0\}$  par hypothèse, il existe donc  $\mathfrak{p} \in M$  tel que  $I\mathcal{A}_{\mathfrak{p}} \subsetneq \mathcal{A}_{\mathfrak{p}}$ . Soit  $\mathfrak{p} \in M$  tel que  $I\mathcal{A}_{\mathfrak{p}} \subsetneq \mathcal{A}_{\mathfrak{p}}$  : l'idéal  $I\mathcal{A}_{\mathfrak{p}}$  est contenu dans le seul idéal maximal  $\mathfrak{p}\mathcal{A}_{\mathfrak{p}}$  de  $\mathcal{A}_{\mathfrak{p}}$ . Or

l'inclusion  $\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{A}_{\mathfrak{p}}$  donne l'inclusion  $\varphi : \hat{\mathcal{A}} \hookrightarrow \widehat{(\mathcal{A}_{\mathfrak{p}})} := \varprojlim_n \mathcal{A}_{\mathfrak{p}}/I^n \mathcal{A}_{\mathfrak{p}}$ , où  $\widehat{(\mathcal{A}_{\mathfrak{p}})}$  est local d'idéal maximal  $\mathfrak{p}(\widehat{(\mathcal{A}_{\mathfrak{p}})})$  [Bour, AC III, § 3, n° 4, prop 8 (ii)] : le schéma  $\text{Spec } \widehat{(\mathcal{A}_{\mathfrak{p}})}$  est connexe et son image par le morphisme dominant

$$\text{Spec } \varphi : \text{Spec } \widehat{(\mathcal{A}_{\mathfrak{p}})} \rightarrow \text{Spec } \hat{\mathcal{A}}$$

est un connexe dense, donc  $\text{Spec } \hat{\mathcal{A}}$  est connexe ; comme  $\hat{\mathcal{A}}$  est noethérien (cf (1)) et normal (cf (4) (ii)), il en résulte que  $\hat{\mathcal{A}}$  est intègre [EGA I, (4.5.6)] et intégralement clos.  $\square$

## 2. Des équivalences de catégories

**Théorème (2.1).** *Soit  $A$  une  $\mathcal{V}$ -algèbre telle que l'anneau  $A$  soit noethérien. On suppose que le morphisme canonique  $\text{Spec } \hat{A} \rightarrow \text{Spec } A$  est normal (vrai par exemple si  $A$  est excellent). Alors*

- (1) *Le morphisme canonique*

$$f : \text{Spec } \hat{A} \rightarrow \text{Spec } \tilde{A}$$

*est normal, fidèlement plat, à fibres géométriquement intègres.*

- (2) (i) *Si  $\tilde{A}$  est réduit alors  $\tilde{A}$  est intégralement fermé dans  $\hat{A}$ .*  
(ii) *Le (i) est vérifié si  $A$  est réduit.*  
(iii) *On a les équivalences :*  
 $\tilde{A}$  intègre (resp. intégralement clos)  
 $\Leftrightarrow \hat{A}$  intègre (resp. intégralement clos).

*Démonstration.* Pour le (1),  $\hat{A}$  est le séparé complété  $I$ -adique de  $\tilde{A}$ , et  $\tilde{A}$  est de Zariski [prop (1.7) (1)], donc  $f$  est fidèlement plat [Bour, AC III, § 3, n° 5, prop 9]. L'hypothèse entraîne alors que  $f$  est normal à fibres géométriquement intègres via [prop (1.1) (3)], car  $(\tilde{A}, \tilde{I})$  est un couple hensélien [R 2, théo 3, p126].

Le (2) (i) résulte de [prop (1.1) (4)], car  $(\tilde{A}, \tilde{I})$  est un couple hensélien, et le (2) (ii) provient de [prop (1.7) (2) (i)].

Dans le (2) (iii) l'assertion dans le cas “intégralement clos” est prouvée dans [prop (1.7), (4) (iv)]. Pour le cas “intègre”, comme  $\tilde{A} \hookrightarrow \hat{A}$  est fidèlement plat, il suffit de prouver que si  $\tilde{A}$  est intègre, alors  $\hat{A}$  l'est : supposons  $\tilde{A}$  intègre, alors  $\tilde{A}$  est réduit [prop (1.7) (4) (i)] ; or les fibres de  $f$  sont



géométriquement intègres, ainsi  $\text{Spec } \hat{A}$  est irréductible [EGA IV, (2.3.5) (iii)] et réduit, donc  $\hat{A}$  est intègre.  $\square$

**Théorème (2.2).** *Soit  $A$  une  $\mathcal{V}$ -algèbre de type fini ; on suppose que le morphisme canonique  $\text{Spec } \hat{A} \rightarrow \text{Spec } A$  est normal (vrai par exemple si  $\mathcal{V}$  est excellent). Alors :*

- (1) *Les morphismes canoniques*

$$g : \text{Spec } \hat{A} \longrightarrow \text{Spec } A^\dagger, \quad h : \text{Spec } A^\dagger \longrightarrow \text{Spec } \tilde{A}$$

*sont normaux, fidèlement plats, à fibres géométriquement intègres.*

- (2) (i) *Si  $\tilde{A}$  est réduit,  $\tilde{A}$  est intégralement fermé dans  $A^\dagger$  et dans  $\hat{A}$ .*  
(ii) *Si  $A^\dagger$  est réduit,  $A^\dagger$  (resp.  $A_K^\dagger$ ) est intégralement fermé dans  $\hat{A}$  (resp. dans  $\hat{A}_K$ ).*  
(iii) *Les hypothèses (i) et (ii) sont satisfaites si  $A$  est réduit.*  
(iv) *On a les équivalences :*  
 $\hat{A}$  intègre (resp. intégralement clos)  
 $\Downarrow$   
 $A^\dagger$  intègre (resp. intégralement clos)  
 $\Downarrow$   
 $\hat{A}$  intègre (resp. intégralement clos).

*Démonstration.*

- (1) La preuve pour  $g$  est identique à celle du théorème précédent en remarquant que  $(A^\dagger, IA^\dagger)$  est un couple hensélien [Et 4, théo 3].  
Le cas de  $h$  a été traité dans [prop (1.1) (3)].  
(2) Le (i) et le (ii) ont été vus dans le (4) de [prop (1.1)].  
Le (iii) provient du (4) (i) de [prop (1.7)].  
Dans le (iv) l’assertion dans le cas “intégralement clos” est prouvée dans [prop (1.7) (4) (iv)]. Pour le cas “intègre” les inclusions  $\tilde{A} \subset A^\dagger \subset \hat{A}$  ramènent la preuve au (2) (iii) du théorème (2.1).  $\square$

**Remarque (2.2.1).** Lorsque  $\mathcal{V}$  est un anneau de valuation discrète complet et  $A$  une  $\mathcal{V}$ -algèbre de type fini,  $A$  est excellent [EGA IV, (7.8.3)]. Si  $A^\dagger$  est réduit le (2) (ii) du théorème (2.2) prouve que  $A^\dagger$  est intégralement fermé dans  $\hat{A}$  : on retrouve ainsi l’analogie du théorème 2 de Bosch, Dwork, Robba de [Bo-Dw-R] lorsque la valuation de  $K$  de [loc. cit.] est discrète ; cf. aussi [Bo].

Les théorèmes (2.3) et (2.4) qui suivent améliorent la théorème 15 de [Et 4].

**Théorème (2.3).** *Soit  $A$  une  $\mathcal{A}$ -algèbre telle que l'anneau  $A$  soit noethérien. On suppose que le morphisme canonique  $\mathrm{Spec} \hat{A} \rightarrow \mathrm{Spec} A$  est normal (vrai si  $A$  est excellent). Alors*

- (1) *Le foncteur  $\mathcal{E}$  de la catégorie des  $\tilde{A}$ -schémas étales dans la catégorie des  $\hat{A}$ -schémas étales défini par*

$$f : \mathrm{Spec} \hat{A} \rightarrow \mathrm{Spec} \tilde{A}$$

*est pleinement fidèle.*

- (2) (i) *Le foncteur  $\mathcal{F} : B \mapsto B \otimes_{\tilde{A}} \hat{A}$  de la catégorie des  $\tilde{A}$ -algèbres finies étales dans la catégorie des  $\hat{A}$ -algèbres finies étales défini par  $f$  est une équivalence de catégories.*  
(ii) *Si  $\tilde{A}$  est réduit (c'est le cas par exemple si  $A$  est réduit), le foncteur  $\mathcal{G}$  qui à une  $\tilde{A}$ -algèbre finie étale  $C$  associe la fermeture intégrale de  $\tilde{A}$  dans  $C$  est un foncteur quasi-inverse de  $\mathcal{F}$ .*

*Démonstration.* Le (1) et le (2) (i) se démontrent comme le (1) du théorème 15 de [Et 4].

Pour (2) (ii) il suffit, grâce au fait que  $\mathcal{F}$  est une équivalence de catégories, de prouver que si  $B$  est une  $\tilde{A}$ -algèbre finie étale, alors  $B$  est la fermeture intégrale de  $\tilde{A}$  dans  $B \otimes_{\tilde{A}} \hat{A} \simeq \hat{B}$ .

Supposons  $\tilde{A}$  réduit et soit  $B$  une  $\tilde{A}$ -algèbre finie étale : alors  $(B, IB)$  est un couple hensélien [R 2, prop 2 (1) p 124],  $B$  est réduit par le (1) (i) du [lemme (1.6)] et  $\mathrm{Spec} \hat{B} \rightarrow \mathrm{Spec} B$  est un morphisme normal [EGA IV, (6.8.3) (iii)] ; par le (4) de la [prop (1.1)] on en déduit que  $B$  est intégralement fermé dans  $\hat{B}$ . Comme  $B$  est fini sur  $\tilde{A}$ ,  $B$  est bien la fermeture intégrale de  $\tilde{A}$  dans  $\hat{B}$ .  $\square$

**Théorème (2.4).** *Soit  $A$  une  $\mathcal{V}$ -algèbre de type fini ; on suppose que le morphisme canonique  $\mathrm{Spec} \hat{A} \rightarrow \mathrm{Spec} A$  est normal (vrai par exemple si  $\mathcal{V}$  est excellent) et on désigne par  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  l'un des couples  $(\tilde{A}, A^\dagger), (A^\dagger, \hat{A})$ . Alors*

- (1) *Le foncteur  $\mathcal{E}$  de la catégorie des  $\mathcal{A}$ -schémas étales dans la catégorie des  $\mathcal{B}$ -schémas étales défini par*

$$f : \mathrm{Spec} \mathcal{B} \rightarrow \mathrm{Spec} \mathcal{A}$$

*est pleinement fidèle.*

- (2) (i) *Le foncteur  $\mathcal{F} : B \mapsto B \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B}$  de la catégorie des  $\mathcal{A}$ -algèbres finies étales dans la catégorie des  $\mathcal{B}$ -algèbres finies étales défini par  $f$  est une*

*équivalence de catégories.*

(ii) *Si  $\mathcal{A}$  est réduit (c'est le cas par exemple si  $A$  est réduit), le foncteur  $\mathcal{G}$  qui à une  $\mathcal{B}$ -algèbre finie étale  $C$  associe la fermeture intégrale de  $\mathcal{A}$  dans  $C$  est un foncteur quasi-inverse de  $\mathcal{F}$ .*

*Démonstration.*

- (1) Ici  $f$  est fidèlement plat et quasi-compact, donc universellement submersif [EGA I, (3.9.4) (ii) et (7.3.5)] ; de plus les fibres de  $f$  sont géométriquement intègres [théo (2.2)]. En vertu de [SGA 1, IX, cor 3.4] le foncteur  $\mathcal{E}$  défini par  $f$  est pleinement fidèle.
- (2) Le (i) se montre comme [Et 4, théo 15, 2 (i) et (ii)]. La preuve du (ii) est la même que celle du (2) (ii) du [théorème (2.3)] si l'on rappelle que toute  $A^\dagger$ -algèbre finie  $B$  est "f.c.t.f" [Et 4, prop 1] et que  $(B, IB)$  est un couple hensélien [loc. cit, théo 3].  $\square$

**Remarque (2.4.1).** La partie (1) des théorèmes (2.3) et (2.4) précédents est une généralisation de [EGA IV, (18.9.5)].

### 3. Schémas formels et relèvements de schémas

**Théorème (3.1).** *Soit  $A$  une  $\mathcal{V}$ -algèbre normale de caractéristique zéro telle que  $A$  soit un anneau noethérien ; on suppose  $A$  excellent et  $0 \notin T := 1 + IA$ . On note  $A_0 = A/IA$ . Alors*

- (1) *Si  $\varphi : S' \rightarrow \text{Spec } A_0 =: S$  est un morphisme fini étale, il existe un morphisme fini*

$$\psi : \text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$$

*relevant  $\varphi$ , où  $B$  est normal (resp.  $B$  est intégralement clos si  $A$  l'est) et tel que*

$$\psi_T : \text{Spec } B_T \rightarrow \text{Spec } A_T$$

*soit un relèvement fini étale de  $\varphi$ .*

- (2) *De plus il existe  $g_0 \in A_0$  et  $g \in A$  relevant  $g_0$  tels que*

$$\psi_g : \text{Spec } B_g \rightarrow \text{Spec } A_g$$

*soit un relèvement fini étale de*

$$\phi_{g_0} : S'_{g_0} \rightarrow \text{Spec } (A_{0_{g_0}}).$$

- (3) Supposons de plus  $\mathcal{V}$  excellent,  $A$  de type fini sur  $\mathcal{V}$  et fixons une présentation

$$A = \mathcal{V}[t_1, \dots, t_n]/(f_1, \dots, f_r).$$

Notons  $P$  la fermeture projective de  $\text{Spec } A$  dans  $\mathbb{P}_{\mathcal{V}}^n$ ,  $P'$  le normalisé de  $P$  et  $P''$  la fermeture intégrale de  $P$  dans l'anneau  $\mathcal{R}(\text{Spec } B)$  des fonctions rationnelles sur  $\text{Spec } B$ . Les morphismes structuraux  $P'' \rightarrow P'$  et  $P' \rightarrow P$  sont finis, leur composé  $\theta : P'' \rightarrow P$  aussi, et on a des carrés cartésiens

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec } B & \hookrightarrow & P'' \\ \psi \downarrow & & \downarrow \theta \\ \text{Spec } A & \hookrightarrow & P \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \text{Spec } B & \hookrightarrow & P'' \\ \psi \downarrow & & \downarrow \theta' \\ \text{Spec } A & \hookrightarrow & P' \end{array}$$

où les flèches horizontales sont des immersions ouvertes fournissant par passage aux séparés complétés des carrés cartésiens

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}' := \text{Spf } \hat{B} & \xrightarrow{j'} & \hat{P}'' =: \overline{\mathcal{S}'} \\ \hat{\psi} \downarrow & & \downarrow \hat{\theta} \\ \mathcal{S} := \text{Spf } \hat{A} & \xrightarrow{j} & \hat{P} =: \tilde{\mathcal{S}} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \text{Spf } \hat{B} & \hookrightarrow & \hat{P}'' = \overline{\mathcal{S}'} \\ \hat{\psi} \downarrow & & \downarrow \hat{\theta}' \\ \text{Spf } \hat{A} & \hookrightarrow & \hat{P}' = \overline{\mathcal{S}} \end{array}$$

où  $\hat{\psi}$  est un relèvement fini étale de  $\varphi$ ,  $\hat{\theta}$  et  $\hat{\theta}'$  sont finis,  $\hat{P}'$  est normal et les flèches horizontales sont des immersions ouvertes.

De plus  $\mathcal{O}_{\hat{P}''}$  est la fermeture intégrale de  $\mathcal{O}_{\hat{P}}$  (resp. de  $\mathcal{O}_{\hat{P}'}$ ) dans  $\mathcal{O}_{\mathcal{S}'}$  [EGA II, (6.3.2)].

Enfin,  $\hat{\theta}$  (resp.  $\hat{\theta}'$ ) est plat si et seulement si sa réduction module  $I$  est plate.

Donnons tout de suite un corollaire et sa démonstration avant de prouver le théorème.

**Corollaire (3.2).** Soit  $\mathcal{V}$  un anneau de valuation discrète complet de caractéristique zéro, d'idéal maximal  $I$  et de corps résiduel  $k$ . Si  $A_0$  est une  $k$ -algèbre lisse et  $\varphi : \text{Spec } B_0 \rightarrow \text{Spec } A_0$  est un morphisme fini étale, alors il existe une  $\mathcal{V}$ -algèbre lisse  $A$  et un morphisme fini  $\psi : \text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$  relevant  $\varphi$  et satisfaisant aux propriétés du théorème (3.1).

*Démonstration du corollaire (3.2).* L'existence d'une  $\mathcal{V}$ -algèbre lisse  $A$  relevant  $A_0$  résulte du théorème 6 de Elkik [El]. Le  $\mathcal{V}$  du corollaire est régulier [EGA  $O_{IV}$ , (17.1.4) (ii)] et excellent [EGA IV, (7.8.3)] : comme  $A$  est lisse

sur  $\mathcal{V}$ ,  $A$  est régulier [EGA IV, (17.5.8)] et excellent [EGA IV, (7.8.3)]. Il suffit alors d'appliquer le théorème (3.1).  $\square$

*Démonstration du théorème (3.1).*

**(1) et (2)** . D'après [EGA IV, (18.3.2)] il existe une  $\hat{A}$ -algèbre finie étale  $C$  telle que  $\text{Spec } C \rightarrow \text{Spec } \hat{A}$  relève  $\varphi$ . Puisque  $A$  est noethérien normal on peut décomposer  $\text{Spec } A$  en somme de ses composantes connexes  $\coprod_i \text{Spec } A_i$ , avec  $A_i$  intégralement clos, et  $\coprod_i \text{Spec } \hat{A}_i$  est une décomposition de  $\text{Spec } \hat{A}$  en somme de ses composantes connexes, avec  $\hat{A}_i$  intégralement clos [prop (1.7) (4) (iv)] :  $C$  est aussi normal noethérien et on le décompose de même. Comme  $\text{Spec } C \rightarrow \text{Spec } \hat{A}$  est fini et plat, on est ramené au cas où ce morphisme est surjectif avec  $C$  et  $\hat{A}$  intégralement clos.

Soient  $L$  le corps des fractions de  $\hat{A}$  et  $L_1$  celui de  $C$  : d'après [EGA II, (6.1.8)]  $L \hookrightarrow L_1$  est une extension finie de corps de caractéristique nulle (donc l'extension est séparable) et  $C$  est la fermeture intégrale de  $\hat{A}$  dans  $L_1$ . Par le théorème de l'élément primitif il existe  $x \in L_1$  tel que  $L_1 = L[x]$  :  $x$  est séparable sur  $L$  [Bour, A V, prop 6 p 38], son polynôme minimal  $f(X) \in L[X]$  est séparable [Bour, A V, prop 5 p 38], donc  $f \wedge f' = 1$  dans  $L[X]$  [Bour, A V, prop 3 p 36] ; appliquant Bézout dans  $L[X]$ , il existe  $g_1 \in \hat{A}$  tel que  $f, f' \in (\hat{A})_{g_1}[X]$  et tel qu'il existe  $u, v \in (\hat{A})_{g_1}[X]$  vérifiant l'identité  $uf + vf' = 1$  dans  $(\hat{A})_{g_1}[X]$ . Ainsi le morphisme canonique

$$\mu : (\hat{A})_{g_1} \longrightarrow (\hat{A})_{g_1}[X] / (f)$$

est fini étale [Mi, I, 3.4] et s'insère dans le carré cocartésien

$$\begin{array}{ccc} (\hat{A})_{g_1} & \xrightarrow{\mu} & (\hat{A})_{g_1}[X]/(f) =: D \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Frac}(\hat{A})_{g_1} = L & \hookrightarrow & L_1 = L[X]/(f) = L \otimes_{(\hat{A})_{g_1}} D ; \end{array}$$

par suite  $\mu$  est fidèlement plat puisqu'il est injectif. La platitude de  $\mu$  fournit l'injectivité de  $D \hookrightarrow L_1$ , donc  $D$  est intègre (de corps des fractions  $L_1$ ) et normal [EGA IV, (17.5.7)], donc intégralement clos ; donc  $D$  est la fermeture intégrale de  $(\hat{A})_{g_1}$  dans  $L_1$ . Par changement de base,  $\mu$  fournit le morphisme fini étale fidèlement plat

$$\rho : \widehat{(\hat{A})}_{g_1} \hookrightarrow \widehat{(\hat{A})}_{g_1}[X] / (\hat{f}),$$

où  $\hat{f}$  est l'image de  $f$  dans  $\widehat{(\hat{A})}_{g_1}[X]$ .

Soit  $g_2 \in A$  un relèvement de  $(g_1 \bmod I) \in A_0$  : comme  $\widehat{(\hat{A})}_{g_1}$  est une  $A$ -algèbre formellement étale par les topologies  $I$ -adiques il existe un unique  $A$ -morphisme (en fait un  $\hat{A}$ -morphisme)

$$\nu : \widehat{(\hat{A})}_{g_1} \longrightarrow \widehat{(\hat{A})}_{g_2}$$

relevant l'identité de  $A_{g_2} / IA_{g_2}$  et  $\nu$  est un isomorphisme [EGA  $O_I$ , (6.6.21)]. Notons  $f_1(X) \in A_{g_2}[X]$  un polynôme unitaire relevant

$$f(X) \bmod I \in (\hat{A})_{g_1}[X] / I(\hat{A})_{g_1}[X] \simeq A_{g_2}[X] / IA_{g_2}[X] ;$$

alors, si  $\hat{f}_1$  désigne l'image de  $f_1$  dans  $\widehat{(\hat{A})}_{g_2}[X]$ ,  $\widehat{(\hat{A})}_{g_2}[X] / (\hat{f}_1)$  est fini et plat sur  $\widehat{(\hat{A})}_{g_2}$  car  $\hat{f}_1$  est unitaire [Mi, I, 2.6 (a)]. Comme  $\rho$  est fini étale, que  $D$  et  $\widehat{(\hat{A})}_{g_2}[X] / (\hat{f}_1)$  ont même réduction mod  $I$  et que  $\widehat{(\hat{A})}_{g_1}$  s'identifie à  $\widehat{(\hat{A})}_{g_2}$  via  $\nu$ , il existe un unique  $\widehat{(\hat{A})}_{g_2}$ -morphisme

$$\widehat{(\hat{A})}_{g_2}[X] / (\nu(\hat{f})) \rightarrow \widehat{(\hat{A})}_{g_2}[X] / (\hat{f}_1)$$

qui est un isomorphisme [EGA  $O_I$ , (6.6.21)] relevant l'identité de  $D/ID$ . Puisqu'on a des injections

$$(\hat{A})_{g_1} \hookrightarrow (\hat{A})_{g_1,T} \hookrightarrow (\widehat{(\hat{A})}_{g_1,T}) = (\widehat{(\hat{A})}_{g_1}),$$

$$A_{g_2} \hookrightarrow A_{g_2T} \hookrightarrow (\widehat{(\hat{A})}_{g_2,T}) = \widehat{(\hat{A})}_{g_2}$$

et que  $f$  et  $f_1$  sont unitaires on en déduit que

$$\nu(\hat{f}) = \hat{f}_1,$$

i.e. que dans l'écriture  $L_1 = L[X] / (f)$  on peut supposer  $f = f_1 \in A_{g_2}[X]$  : ainsi il existe  $g_3 \in A$  tel que  $f, f' \in A_{g_3}[X]$  et tel qu'il existe  $u, v \in A_{g_3}[X]$  vérifiant l'identité  $uf + vf' = 1$  dans  $A_{g_3}[X]$ . En particulier le morphisme canonique

$$\eta : A_{g_3} \rightarrow A_{g_3}[X] / (f)$$

est fini étale et s'insère dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
A_{g_3}[X]/(f) & \xrightarrow{\tau} & (\hat{A})_{g_3}[X]/(f) & \longrightarrow & L_1 \\
\uparrow \eta & & \uparrow & & \uparrow \\
A_{g_3} & \hookrightarrow & (\hat{A})_{g_3} & \hookrightarrow & L
\end{array} ;$$

par suite  $\eta$  est injectif, donc fidèlement plat. Par le même raisonnement que ci-dessus pour  $D = (\hat{A})_{g_1}[X] / (f)$  on montre que  $(\hat{A})_{g_3}[X] / (f)$  est intègre et intégralement clos de corps des fractions  $L_1$ . La platitude de  $\eta$  fournit l'injectivité de  $\tau$  : donc  $A_{g_3}[X] / (f)$  est intègre de corps des fractions noté  $K_1$  ; on notera  $K$  le corps des fractions de  $A$ . On sait par [EGA IV, (18.10.12)] que  $K_1$  est une extension finie étale de  $K$  et que  $A_{g_3}[X] / (f)$  est la fermeture intégrale de  $A_{g_3}$  dans  $K_1$  : comme  $f$  est irréductible dans  $L[X]$ , il l'est aussi dans  $K[X] \subset L[X]$ , d'où  $K_1 = K[X] / (f)$ .

Comme  $A$  est excellent, il est universellement japonais [EGA IV, (7.8.3) (vi)] : la fermeture intégrale  $B$  de  $A$  dans  $K_1 = K[X] / (f)$  est une  $A$ -algèbre finie,  $\text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$  est surjectif et  $B_{g_3} = A_{g_3}[X] / (f)$  ;  $B$  est aussi la fermeture intégrale de  $A$  dans  $A_{g_3}[X] / (f)$ ,  $B_T$  est la fermeture intégrale de  $A_T$  dans  $A_{g_3,T}[X] / (f)$ , et le corps des fractions de  $B$  est  $K_1$  (donc  $B$  est intégralement clos). Comme  $\text{Spec } \hat{A} \rightarrow \text{Spec } A$  est un morphisme régulier [EGA IV, (7.8.3) (v)], donc normal, la fermeture intégrale de  $\hat{A}$  dans  $(\hat{A})_{g_3}[X] / (f)$  est égale à  $\hat{B} = B \otimes_A \hat{A}$  [EGA IV, (6.14.4)] : or  $(\hat{A})_{g_3}[X] / (f)$  est intégralement clos ; donc  $\hat{B}$  est la fermeture intégrale de  $\hat{A}$  dans  $L_1$ , d'où  $\hat{B} = C$ . On en déduit que  $B$  et  $C$  ont même réduction mod  $I$ , d'où l'existence du morphisme fini

$$\psi : \text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$$

relevant  $\varphi$  et il suffit de prendre  $g = g_3, g_0 = g \bmod I$ .

De plus  $\text{Spec } \hat{A} = \text{Spec } \hat{A}_T \rightarrow \text{Spec } A_T$  est un morphisme normal puisque  $A_T$  est excellent : par suite la fermeture intégrale de  $\hat{A} = \widehat{\hat{A}_T}$  dans  $(\hat{A})_{g_3}[X] / (f)$ , qu'on sait être égale à  $C = \hat{B}$ , est aussi égale à  $B_T \otimes_{A_T} \hat{A} = \widehat{B_T} = \hat{B}$  [EGA IV, (6.14.4)]. Par passage aux séparés complétés  $\psi$  induit

$$\hat{\psi} = \text{Spec } \hat{B} \rightarrow \text{Spec } \hat{A}$$

qui s'identifie à notre morphisme fini étale

$$\text{Spec } C \rightarrow \text{Spec } \hat{A} ;$$

par fidèle platitude de  $\hat{A}$  sur  $A_T$  le morphisme

$$\psi_T = \text{Spec } B_T \rightarrow \text{Spec } A_T$$

est donc fini étale et c'est clairement un relèvement de  $\varphi : S' \rightarrow \text{Spec } A_0$ .

**(3)** On se ramène à  $A$  et  $B$  intégralement clos comme en (1) dont on reprend les notations. Le schéma  $P$  est intègre, car on a supposé  $A$  intègre [EGA I, (6.10.5)], d'où  $\mathcal{R}(P) = \mathcal{R}(\text{Spec } A) = \text{Frac } A = K$  est un corps [EGA I, (8.1.5)]. Le schéma  $P$  est excellent, donc pour chaque ouvert  $U = \text{Spec } R \subset P$ ,  $R$  est japonais [EGA IV, (7.8.3)] : ainsi la fermeture intégrale  $P'$  (resp.  $P''$ ) de  $P$  dans  $\mathcal{R}(\text{Spec } A) = K$  (resp. dans  $\mathcal{R}(\text{Spec } B) = K_1 = K[X] / (f)$ ) est un  $P$ -schéma fini et on a  $\mathcal{R}(P') = K$  (resp.  $\mathcal{R}(P'') = K_1$ ) [EGA II, (6.3.7)] : évidemment  $P''$  est aussi la fermeture intégrale de  $P'$  dans  $K_1$  et  $P'' \rightarrow P'$  est fini. De plus  $P'$  est intégralement clos car noethérien normal et intègre [EGA II, (6.3.8)] ; comme  $A$  est intégralement clos,  $P'$  est aussi la fermeture intégrale de  $P$  dans  $\text{Spec } A$  : on a donc une immersion ouverte

$$\text{Spec } A \hookrightarrow P'$$

[R 2, cor 2, p 42]. Par [EGA II, Rq entre (6.3.4) et (6.3.5)] ou [EGA IV, (6.14.4)] les carrés

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec } B \hookrightarrow P'' & & \text{Spec } B \hookrightarrow P'' \\ \psi \downarrow & \theta \downarrow & \downarrow \psi \\ \text{Spec } A \hookrightarrow P & & \text{Spec } A \hookrightarrow P' \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \text{Spec } B \hookrightarrow P'' & & \text{Spec } B \hookrightarrow P'' \\ \psi \downarrow & \theta' \downarrow & \downarrow \psi \\ \text{Spec } A \hookrightarrow P & & \text{Spec } A \hookrightarrow P' \end{array}$$

sont cartésiens.

On conclut la démonstration du théorème (3.1) par passage aux séparés complétés : que  $\mathcal{O}_{\hat{P}'}$  soit la fermeture intégrale de  $\mathcal{O}_{\hat{P}}$  (resp.  $\mathcal{O}_{\hat{P}'}$ ) dans  $\mathcal{O}_{S'}$  résulte de [EGA IV, (6.14.4)] compte tenu du fait que  $\hat{P} \rightarrow P$  est un morphisme normal, car  $P$  est excellent. De même  $\hat{P}' \rightarrow P'$  est normal : ainsi  $\hat{P}'$  est normal car  $P'$  l'est [prop (1.7)].

Il nous reste à montrer que si  $\hat{\theta} \bmod I$  (resp.  $\hat{\theta}' \bmod I$ ) est plat, alors  $\hat{\theta}$  (resp.  $\hat{\theta}'$ ) est plat : faisons la démonstration pour  $\hat{\theta}$ . Comme ci-dessus on peut supposer  $P$  intègre et se limiter à un ouvert affine  $V = \text{Spec } R$  de  $P$  : alors l'ensemble  $U$  des points de  $V$  tels que la restriction de  $\theta$  à  $\theta^{-1}(U)$  soit plate est un ouvert non vide de  $V$  [EGA IV, (11.1.1), (2.4.6), (6.9.1)] et  $U$  contient la réduction  $V_0$  de  $V$  modulo  $I$  par hypothèse. En posant :  $\tilde{U} := U \times_V \text{Spec } \hat{R}$



et  $\tilde{P}'' := \tilde{U} \times_P P''$ , soit  $\tilde{\theta} : \tilde{P}'' \rightarrow \tilde{U}$  l'image inverse de  $\theta$  par le changement de base  $\tilde{U} \rightarrow P : \tilde{\theta}$  est plat. Or  $\tilde{U}$  est un ouvert de  $\text{Spec } \hat{R}$  qui contient  $V_0$ , donc  $\tilde{U} = \text{Spec } \hat{R}$  via [EGA IV, (18.5.4.3)] car  $(\text{Spec } \hat{R}, V_0)$  est un couple hensélien [Et 4, théo 3]. Par passage aux complétés formels,  $\hat{\theta} : \widehat{\tilde{P}''} \rightarrow \hat{P}$  est plat.  $\square$

**Théorème (3.3).** *Soient  $\mathcal{V}$  un anneau excellent normal,  $I \subset \mathcal{V}$  un idéal et  $\mathcal{V}_0 = \mathcal{V}/I$  tel que  $(\mathcal{V}, \mathcal{V}_0)$  soit un couple hensélien au sens de [EGA IV, (18.5.5)]; on suppose  $\mathcal{V}_0$  normal. Soient  $S_0 = \text{Spec } A_0$  un  $\mathcal{V}_0$ -schéma affine et lisse,  $A = \mathcal{V}[t_1, \dots, t_d]/J$  une  $\mathcal{V}$ -algèbre lisse relevant  $A_0$  et dont on a fixé une présentation et  $S = \text{Spec } A$  : on note  $\hat{A}$  le séparé complété de  $A$  pour la topologie  $I$ -adique,  $A^\dagger$  son complété faible,  $\tilde{A}$  l'hensélisé de  $A$  au sens de Raynaud et  $\hat{S} = \text{Spec } \hat{A}$ ,  $S^\dagger = \text{Spec } A^\dagger$ ,  $\tilde{S} = \text{Spec } \tilde{A}$ . On désigne par  $\overline{S}$  l'adhérence schématique de  $S$  dans  $\mathbb{P}_{\mathcal{V}}^d$ , et par  $\mathcal{S}$  (resp.  $\overline{\mathcal{S}}$ ) le complété formel  $I$ -adique de  $S$  (resp. de  $\overline{S}$ ).*

Soit  $f : X_0 \rightarrow S_0$  un  $\mathcal{V}_0$ -morphisme projectif. Alors

(3.3.1) *Il existe un carré cartésien*

$$(3.3.1.1) \quad \begin{array}{ccc} X^\subset & \xrightarrow{\quad} & \overline{X} \\ h \downarrow & & \downarrow \bar{h} \\ S^\subset & \xrightarrow{\quad} & \overline{S} \end{array}$$

dans lequel  $\bar{h}$  est projectif,  $h$  est un relèvement projectif de  $f$  et les flèches horizontales sont des immersions ouvertes.

(3.3.2) *Considérons le diagramme commutatif à carrés cartésiens déduit de (3.3.1.1)*

$$(3.3.2.1) \quad \begin{array}{ccccccc} X_{\hat{S}} & \longrightarrow & X_{S^\dagger} & \longrightarrow & X_{\tilde{S}} & \longrightarrow & X^\subset \longrightarrow \overline{X} \\ h_{\hat{S}} \downarrow & & h_{S^\dagger} \downarrow & & h_{\tilde{S}} \downarrow & & h \downarrow \quad \downarrow \bar{h} \\ \hat{S} & \longrightarrow & S^\dagger & \longrightarrow & \tilde{S} & \longrightarrow & S^\subset \longrightarrow \overline{S} \end{array}$$

dans lequel  $h, h_{\hat{S}}, h_{S^\dagger}, h_{\tilde{S}}$  sont des relèvements projectifs de  $f$ .

Alors on a équivalence entre les propriétés suivantes :

- (i)  $X$  est plat sur  $\mathcal{V}$  et  $f$  est plat.
- (ii)  $h_{\hat{S}}$  est plat.

(iii)  $h_{S^\dagger}$  est plat.

(iv)  $h_{\tilde{S}}$  est plat.

(3.3.3) Alors on a équivalence entre les propriétés suivantes :

(i)  $X$  est plat sur  $\mathcal{V}$  et  $f$  est lisse.

(ii)  $h_{\tilde{S}}$  est lisse.

(iii)  $h_{S^\dagger}$  est lisse.

(iv)  $h_{\tilde{S}}$  est lisse.

(3.3.4) Le carré cartésien (3.3.1.1) fournit par passage aux complétés formels un carré cartésien de  $\mathcal{V}$ -schémas formels

$$(3.3.4.1) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \hookrightarrow & \overline{\mathcal{X}} \\ \hat{h} \downarrow & & \downarrow \hat{\hat{h}} \\ \mathcal{S} & \hookrightarrow & \overline{\mathcal{S}} \end{array}$$

dans lequel  $\hat{h}$  est un relèvement projectif de  $f$ ,  $\hat{\hat{h}}$  est projectif et les flèches horizontales sont des immersions ouvertes.

De plus on a équivalence entre les propriétés suivantes :

(i)  $X$  est plat sur  $\mathcal{V}$  et  $f$  est plat (resp.  $f$  est lisse).

(ii)  $\hat{h}$  est plat (resp.  $\hat{h}$  est lisse).

*Démonstration.* Quitte à décomposer les schémas normaux noethériens  $\text{Spec } \mathcal{V}$  et  $S_0$  en somme de leurs composantes connexes on supposera dans toute la suite que  $\text{Spec } \mathcal{V}$  et  $S_0$  sont connexes, donc intégralement clos.

Pour (3.3.1). Le morphisme projectif  $f$  se factorise en  $f : X_0 \xrightarrow{i_0} \mathbb{P}_{A_0}^n \xrightarrow{s_0} S_0 = \text{Spec } A_0$  où  $i_0$  est une immersion fermée et  $s_0$  est le morphisme canonique. Soient  $(x_0, x_1, \dots, x_n)$  les coordonnées projectives sur  $\mathbb{P}_{A_0}^n$  (resp. sur  $\mathbb{P}_S^n$ ) : alors  $X_0$  est isomorphe à  $\text{Proj}(A_0[x_0, x_1, \dots, x_n]/\mathcal{J}^0)$  pour un certain idéal homogène  $\mathcal{J}^0$  de l'anneau noethérien  $A_0[x_0, x_1, \dots, x_n]$  :  $\mathcal{J}^0$  est engendré par un nombre fini de polynômes homogènes  $f_0^1, \dots, f_0^r$ . Pour  $\alpha \in \{1, \dots, r\}$  relevons  $f_0^\alpha$  en un polynôme homogène  $f^\alpha \in A[x_0, x_1, \dots, x_n]$  de même degré en relevant coefficient par coefficient de  $A_0$  à  $A$ , et soit  $\mathcal{J}$  l'idéal (homogène) engendré par  $f^1, \dots, f^r$

$$\mathcal{J} = (f^1, \dots, f^r) \subset A[x_0, x_1, \dots, x_n] .$$

Désignons par

$$i : X = \text{Proj}(A[x_0, x_1, \dots, x_n]/\mathcal{J}) \hookrightarrow \mathbb{P}_S^n$$

l'immersion fermée et par  $p_S : \mathbb{P}_S^n \rightarrow S = \text{Spec } A$  la projection canonique. Alors le morphisme composé

$$h = p_S \circ i : X \rightarrow S$$

est un relèvement projectif de  $f$ . Notons  $p_{\bar{S}} : \mathbb{P}_{\bar{S}}^n \rightarrow \bar{S}$  la projection canonique,  $\bar{X}$  la fermeture intégrale de  $\mathbb{P}_{\bar{S}}^n$  dans  $X$ ,  $\bar{i} : \bar{X} \hookrightarrow \mathbb{P}_{\bar{S}}^n$  l'immersion fermée et  $\bar{h} = p_{\bar{S}} \circ \bar{i} : \bar{X} \rightarrow \bar{S}$  est projectif. On dispose ainsi d'un carré cartésien

$$(3.3.1.1) \quad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{j_Y} & \bar{X} \\ h \downarrow & & \downarrow \bar{h} \\ S & \xrightarrow{j_{\bar{S}}} & \bar{S} \end{array}$$

où les flèches horizontales sont des immersions ouvertes.

Pour (3.3.2). On a le lemme suivant :

**Lemme(3.3.2.2).** *On a l'équivalence :*

$$X \text{ est plat sur } \mathcal{V} \iff X_{\hat{S}} \text{ est plat sur } \mathcal{V} .$$

*Démonstration du lemme.* Notons  $v$  le morphisme composé  $X \xrightarrow{h} S \rightarrow \text{Spec } \mathcal{V}$  et  $w$  le composé de  $v$  avec le morphisme plat  $X_{\hat{S}} \rightarrow X$ . Si  $v$  est plat,  $w$  l'est. Supposons que  $w$  soit plat : d'après le critère de platitude par fibres [EGA IV, (11.3.10)]  $v$  est plat sur sa fibre spéciale  $X_0$ , donc au-dessus de  $\mathcal{V}_0$ . Or par le théorème de platitude générique [EGA IV, (6.9.1)] il existe un ouvert non vide  $V$  de  $\text{Spec } \mathcal{V}$  au-dessus duquel  $v$  est lisse ; comme cet ouvert  $V$  contient  $\text{Spec } \mathcal{V}_0$  d'après le raisonnement fait ci-dessus, il résulte de [EGA IV, (18.5.4.3)] que  $V = \text{Spec } \mathcal{V}$  puisque  $(\mathcal{V}, \mathcal{V}_0)$  est un couple hensélien. D'où le lemme.  $\square$

On montre de la même façon le lemme suivant :

**Lemme(3.3.2.3).** *Avec  $\mathcal{V}$  comme dans le théorème (3.3), soit  $B$  une  $\mathcal{V}$ -algèbre de type fini, de séparé complété  $I$ -adique noté  $\hat{B}$ . Alors on a l'équivalence :*

$$B \text{ est plat sur } \mathcal{V} \iff \hat{B} \text{ est plat sur } \mathcal{V} .$$

Par fidèle platitude des morphismes  $\hat{S} \rightarrow S^\dagger$  et  $S^\dagger \rightarrow \tilde{S}$  les propriétés (ii), (iii), (iv) sont équivalentes.

Supposons (ii) vérifié : alors  $X_{\hat{S}}$  est plat sur  $\mathcal{V}$ , donc par le lemme (3.3.2.2)  $X$  est plat sur  $\mathcal{V}$  et (i) est clair. Il nous reste à prouver que (i)  $\Rightarrow$  (ii). Supposons la propriété (i) vérifiée. Puisque  $X_{\hat{S}}$  est plat sur  $\mathcal{V}$  (car  $X$  est plat sur  $\mathcal{V}$ ) et  $f$  est plat, le critère de platitude par fibres [EGA IV, (11.3.10)] prouve que  $h_{\hat{S}}$  est plat en tous les points au-dessus de  $S_0$ . Or  $\text{Spec } \hat{A}$  est connexe car  $S_0 = \text{Spec } A_0$  l'est [Et 4, cor 2 du théo 3]; comme  $A$  est normal et que le morphisme  $A \rightarrow \hat{A}$  est normal, car régulier [EGA IV, (7.8.3) (v)], il résulte de la [prop (1.7) 4 (ii)] que  $\hat{A}$  est normal, donc que  $\hat{A}$  est intégralement clos. Par le théorème de platitude générique [EGA IV, (6.9.1)] il existe un ouvert non vide  $V$  de  $\text{Spec } \hat{A}$  tel que la restriction  $h_V : h_{\hat{S}}^{-1}(V) \rightarrow V$  de  $h_{\hat{S}}$  soit plate. Or  $V$  contient  $\text{Spec } A_0$  d'après le raisonnement fait ci-dessus, donc  $V = \text{Spec } \hat{A} =: \hat{S}$  puisque  $(\hat{S}, S_0)$  est un couple hensélien [EGA IV, (18.5.4.3)].

*Pour (3.3.3).* Par fidèle platitude des morphismes  $\hat{S} \rightarrow S^\dagger$  et  $S^\dagger \rightarrow \tilde{S}$  les propriétés (ii), (iii), (iv) sont équivalentes. Comme (ii)  $\Rightarrow$  (i) est clair, il nous reste à prouver que (i)  $\Rightarrow$  (ii). Supposons la propriété (i) vérifiée. D'après (3.3.2)  $h_{\hat{S}}$  est plat. Appliquons [EGA IV, (12.2.4)] au morphisme projectif et plat  $h_{\hat{S}} : \text{l'ouvert } W \text{ des } s \in \hat{S} \text{ où } h_s : (X_{\hat{S}})_s \rightarrow s \text{ est lisse}$  contient  $\text{Spec } A_0$  puisque  $f$  est lisse, donc  $W = \hat{S}$  là encore en utilisant le caractère hensélien du couple  $(\hat{S}, S_0)$ . Ainsi on a obtenu un relèvement projectif et lisse  $h_{\hat{S}} : X_{\hat{S}} \rightarrow \hat{S}$  de  $f$ .

*Pour (3.3.4).* Il suffit de prendre le complété formel du carré (3.3.1.1) : on obtient un carré cartésien de  $\mathcal{V}$ -schémas formels

$$(3.3.4.1) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \xrightarrow{j_{\overline{Y}}} & \overline{\mathcal{X}} \\ \hat{h} \downarrow & & \downarrow \hat{\bar{h}} \\ \mathcal{S} & \xrightarrow{j_{\overline{S}}} & \overline{\mathcal{S}} \end{array} ,$$

dans lequel  $\hat{h}$  et  $\hat{\bar{h}}$  sont projectifs. Puisque  $\hat{A}$  est un anneau de Zariski et que  $\hat{h}$  est le complété de  $h, h_{\hat{S}}$ , il résulte de [Bour, AC III, §5 ; n° 4, prop 2, et n° 2, théo 1] que la platitude (resp. la lissité) de  $\hat{h}$  équivaut à celle de  $h_{\hat{S}}$ ; d'où l'équivalence des propriétés (i) et (ii) .  $\square$

**Remarques (3.3.5).** Supposons que  $\mathcal{V}$  est un anneau de valuation discrète complet,  $I$  son idéal maximal,  $k$  son corps résiduel et  $\pi$  une uniformisante.

(i) L'hypothèse de platitude de  $X$  sur  $\mathcal{V}$  dans (3.3.2), (3.3.3) et (3.3.4) équivaut à  $\mathcal{O}_X$  sans  $\pi$ -torsion.

(ii) Lorsque  $S = \text{Spec } \mathcal{V}$ , un exemple de Serre [S 1] prouve qu'il existe des cas où  $X$  n'est pas plat sur  $\mathcal{V}$  : dans ce cas  $h$  n'est pas plat. Nous allons voir ci-dessous en (3.3.7) une condition suffisante de platitude de  $h$ , celle où le morphisme projectif  $f$  identifie  $X$  à une intersection complète dans un espace projectif (cf définition (3.3.6)).

En nous inspirant de la définition donnée par Deligne des intersections complètes dans un fibré projectif [SGA 7, II, exp.XI, 1.4] on adoptera la définition suivante :

**Définition (3.3.6).** Soit  $f : X \rightarrow S$  un morphisme de schémas. On dira que  $X$  est une intersection complète relativement à  $S$  dans des espaces projectifs sur  $S$  si il existe un recouvrement de  $S$  par des ouverts de Zariski  $S_\alpha$ ,  $S = \bigcup_\alpha S_\alpha$  et, en désignant par  $f_\alpha : X_\alpha \rightarrow S_\alpha$  le morphisme déduit de  $f$  par le changement de base  $S_\alpha \rightarrow S$ , il existe, pour chaque  $\alpha$ , un couple  $(n_\alpha, r_\alpha) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$  et une  $S_\alpha$ -immersion fermée  $i_\alpha$  qui factorise  $f_\alpha$

$$(3.3.6.1) \quad \begin{array}{ccc} X_\alpha & \xhookrightarrow{i_\alpha} & \mathbb{P}_{S_\alpha}^{n_\alpha} \\ & \searrow f_\alpha & \downarrow p_\alpha \\ & & S_\alpha \end{array}$$

où  $p_\alpha$  désigne la projection canonique, telle que :

- (i) fibre à fibre,  $i_\alpha$  est de codimension  $r_\alpha$ , i.e. pour tout  $s = \text{Spec } k(s) \in S_\alpha$ , si  $i_{\alpha,s} : X_{\alpha,s} \hookrightarrow \mathbb{P}_s^{n_\alpha}$  désigne la fibre de  $i_\alpha$  au-dessus de  $s$ , on a  $r_\alpha = \text{codim}(X_{\alpha,s}, \mathbb{P}_s^{n_\alpha})$
- (ii) il existe un recouvrement de  $S_\alpha$  par des ouverts de Zariski  $S_{\alpha,\beta}$ ,  $S_\alpha = \bigcup_\beta S_{\alpha,\beta}$  tels que, en désignant par

$$(3.3.6.2) \quad \begin{array}{ccc} X_{\alpha,\beta} & \xhookrightarrow{i_{\alpha,\beta}} & \mathbb{P}_{S_{\alpha,\beta}}^{n_\alpha} \\ & \searrow f_{\alpha,\beta} & \downarrow p_{\alpha,\beta} \\ & & S_{\alpha,\beta} \end{array}$$

le diagramme déduit de (3.3.6.1) par le changement de base  $S_{\alpha,\beta} \rightarrow S_\alpha$ , chaque  $X_{\alpha,\beta} = \text{Proj}(\mathcal{O}_{S_{\alpha,\beta}}[x_0, x_1, \dots, x_{n_\alpha}]/\mathcal{I}_{\alpha,\beta})$  est l'intersection de  $r_\alpha$

*hypersurfaces (de certains degrés) au sens schématique, i.e. l'idéal  $\mathcal{J}_{\alpha,\beta}$  est engendré par  $r_\alpha$  éléments homogènes.*

*On dit alors que  $X_\alpha$  est une intersection complète relativement à  $S_\alpha$  dans  $\mathbb{P}_{S_\alpha}^{n_\alpha}$  de codimension  $r_\alpha$ .*

Nous allons établir le corollaire suivant du théorème (3.3) :

**Corollaire (3.3.7).** *Soient  $\mathcal{V}$  un anneau local normal d'idéal maximal  $I \subset \mathcal{V}$ , complet pour la topologie  $I$ -adique, de corps résiduel  $k = \mathcal{V}/I$ . Soient  $S_0$  un  $k$ -schéma lisse et séparé,  $f : X_0 \rightarrow S_0$  un  $k$ -morphisme projectif et lisse tel que  $X_0$  est une intersection complète, relativement à  $S_0$ , dans des espaces projectifs sur  $S_0$ ,  $S_{\alpha,\beta} = \text{Spec } A_0$  un  $k$ -schéma affine et lisse tel qu'en (3.3.6.2),  $A = \mathcal{V}[t_1, \dots, t_d]/J$  une  $\mathcal{V}$ -algèbre lisse relevant  $A_0$ , dont on a fixé une présentation, et  $S = \text{Spec } A$  : on note  $\hat{A}$  le séparé complété de  $A$  pour la topologie  $I$ -adique,  $A^\dagger$  son complété faible,  $\tilde{A}$  l'hensélisé de  $A$  au sens de Raynaud et  $\hat{S} = \text{Spec } \hat{A}$ ,  $S^\dagger = \text{Spec } A^\dagger$ ,  $\tilde{S} = \text{Spec } \tilde{A}$ . On désigne par  $\overline{S}$  l'adhérence schématique de  $S$  dans  $\mathbb{P}_{\mathcal{V}}^d$ , et par  $\mathcal{S}$  (resp.  $\overline{\mathcal{S}}$ ) le complété formel  $I$ -adique de  $S$  (resp. de  $\overline{S}$ ).*

*Alors le  $X$  construit en (3.3.1) est plat sur  $\mathcal{V}$  et les morphismes  $h_{\tilde{S}}, h_{S^\dagger}, h_{\hat{S}}$  de (3.3.2) sont des relèvements projectifs et lisses du morphisme  $f_{\alpha,\beta} : X_{\alpha,\beta} \rightarrow S_{\alpha,\beta}$  déduit de  $f$  par le changement de base  $S_{\alpha,\beta} \rightarrow S_0$ . De plus on dispose d'un diagramme tel que (3.3.4.1) dans lequel  $\hat{h}$  est un relèvement projectif et lisse de  $f$ .*

*Démonstration.* L'anneau  $\mathcal{V}$  est excellent [EGA IV, (7.8.3)(iii)]. Quitte à faire le changement de base  $S_{\alpha,\beta} \rightarrow S_0$  on supposera dans la suite de la démonstration que  $f_{\alpha,\beta} = f$ . Quitte à décomposer les schémas normaux noethériens  $\text{Spec } \mathcal{V}$ ,  $S_0$  et  $X_0$  en somme de leurs composantes connexes on supposera dans toute la suite que  $\text{Spec } \mathcal{V}$ ,  $S_0$  et  $X_0$  sont connexes, donc intégralement clos. En utilisant alors les notations de la preuve de (3.3), avec  $X_0 = \text{Proj}(A_0[x_0, x_1, \dots, x_n]/\mathcal{J}^0)$ , on dispose du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} X_0 & \xhookrightarrow{i_0} & \mathbb{P}_{S_0}^n \\ & \searrow f & \downarrow p_{S_0} \\ & & S_0 \end{array} \quad .$$

Comme  $f$  est plat et  $S_0$  connexe, pour tout  $s \in S_0$ , la dimension de  $X_{0,s} = f^{-1}(s)$  est constante [H 2, III, cor 9.10], donc la codimension  $\text{Codim}(X_{0,s}, \mathbb{P}_{k(s)}^n)$  aussi : notons  $r$  cette dernière. Puisque  $X_0$  est une intersection complète, relativement à  $S_0$ , dans  $\mathbb{P}_{S_0}^n$ , l'idéal  $\mathcal{J}^0$  possède une famille génératrice con-

stituée de  $r$  éléments homogènes : notons ceux-ci  $f_0^1, \dots, f_0^r$ , que l'on relève comme dans la preuve de (3.3) en  $f^1, \dots, f^r$ ; d'où un diagramme tel que (3.3.1.1). Notons  $\mathbb{A}_{S,(j)}^n$ ,  $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , chacun des espaces affines qui recouvrent  $\mathbb{P}_S^n$  et  $X_{(j)} = \text{Spec } (A[x_0, \dots, x_n]/(x_j - 1, f^1, \dots, f^r))$  le schéma induit sur  $\mathbb{A}_{S,(j)}^n$  par  $X$ . Il s'agit de montrer que, pour tout  $j$ ,  $X_{(j)}$  est plat sur  $S$ . Pour  $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , notons  $X_{0,(j)}$  (resp  $\mathbb{A}_{S_0,(j)}^n$ ) la réduction de  $X_{(j)}$  (resp  $\mathbb{A}_{S,(j)}^n$ ) mod  $I$  et  $f_{0,(j)}^\ell(x_0, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n) = f_0^\ell(x_0, \dots, x_{j-1}, x_j = 1, x_{j+1}, \dots, x_n)$ ,  $\ell \in \llbracket 1, r \rrbracket$ . Pour prouver la platitude de  $X_{(j)}$  sur  $S$ , il suffit d'après [Mi, I, Rk 2.6 (d)] de prouver que  $(f_{0,(j)}^1, \dots, f_{0,(j)}^r)$  est une suite régulière, ce qui équivaut ici [EGA 0<sub>IV</sub>, (15.2.2) et (15.2.3)] à prouver qu'elle est quasi-régulière. Or  $i_0$  est une immersion fermée régulière d'après [EGA IV, (17.12.1)], i.e., pour tout  $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , l'idéal  $\mathcal{J}_{(j)}^0 := (f_{0,(j)}^1, \dots, f_{0,(j)}^r)$  est régulier [EGA IV, (16.9.2)] : donc, d'après [EGA 0<sub>IV</sub>, (15.2.2)] et [EGA IV, (16.1.2.2)], l'homomorphisme (ii) de [EGA IV, (16.9.3)] est bijectif. Comme  $i_0$  est régulière, donc quasi-régulière, le faisceau conormal  $\mathcal{N}_{X_0/\mathbb{P}_{S_0}^n}$  est localement libre [EGA IV, (16.9.8)], i.e. pour tout  $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$   $\mathcal{J}_{(j)}^0/(\mathcal{J}_{(j)}^0)^2$  est localement libre : or ici, fibre à fibre au-dessus de chaque point  $s \in S_0$ , il est de rang égal à  $\text{rg } (\mathcal{J}_{(j)}^0/(\mathcal{J}_{(j)}^0)^2) = \text{Codim } (X_{0,s}, \mathbb{P}_{k(s)}^n) = r$ . Donc, pour tout  $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $\mathcal{J}_{(j)}^0/(\mathcal{J}_{(j)}^0)^2$  est localement libre de rang  $r$ . Or les images de  $f_{0,(j)}^1, \dots, f_{0,(j)}^r$  dans  $\mathcal{J}_{(j)}^0/(\mathcal{J}_{(j)}^0)^2$  l'engendrent en tant que  $\mathcal{O}_{X_{0,(j)}}/\mathcal{J}_{(j)}^0$ -module : étant au nombre de  $r$  c'en est une base [Bour, AC II, §3, cor 5 du théo 1] ; ainsi [EGA IV, (16.9.3)] la suite  $(f_{0,(j)}^1, \dots, f_{0,(j)}^r)$  est quasi-régulière. Ceci achève la preuve du corollaire.  $\square$

Dans le théorème qui suit on particularise les hypothèses faites sur l'anneau  $\mathcal{V}$  dans le théorème (3.1) ce qui permet d'étendre celui-ci du cas "fini étale" au cas "fini" :

**Théorème (3.4).** *Soient  $\mathcal{V}$  un anneau excellent normal de caractéristique zéro,  $I \subset \mathcal{V}$  un idéal et  $\mathcal{V}_0 = \mathcal{V}/I$  tel que  $(\mathcal{V}, \mathcal{V}_0)$  soit un couple hensélien au sens de [EGA IV, (18.5.5)] . Soient  $A_0$  et  $C_0$  deux  $\mathcal{V}_0$ -algèbres lisses et*

$$\varphi_0 : A_0 \rightarrow C_0$$

*un  $\mathcal{V}_0$ -morphisme fini (resp. fini et plat; resp. fini et fidèlement plat; resp. fini étale); fixons deux  $\mathcal{V}$ -algèbres lisses  $A$  et  $C$  relevant respectivement  $A_0$  et  $C_0$  et notons  $\hat{A}$ ,  $\hat{C}$  leurs séparés complétés  $I$ -adiques.*

*Alors*

- (1) *Il existe un  $\mathcal{V}$ -morphisme*

$$\varphi : \hat{A} \rightarrow \hat{C}$$

*fini (resp. fini et plat; resp. fini et fidèlement plat; resp. fini étale) relevant  $\varphi_0$ .*

- (2) (i) *Il existe une  $\mathcal{V}$ -algèbre de type fini  $B$  normale (resp. intégralement close si  $A$  l'est) relevant  $C_0$ , un  $\mathcal{V}$ -morphisme fini*

$$\psi : A \rightarrow B$$

*relevant  $\varphi_0$  et un  $\mathcal{V}$ -isomorphisme  $\hat{C} \simeq \hat{B}$  s'insérant dans un triangle commutatif*

$$\begin{array}{ccc} \hat{A} & \xrightarrow{\hat{\psi}} & \hat{B} \\ & \searrow \varphi & \downarrow \simeq \\ & & \hat{C} \end{array} .$$

- (ii) *De plus les  $\mathcal{V}$ -morphisms*

$$\psi_T : A_T \rightarrow B_T \text{ et } \psi^\dagger = \psi \otimes_A A^\dagger : A^\dagger \rightarrow B^\dagger \simeq B \otimes_A A^\dagger$$

*sont finis (resp. finis et plats; resp. finis et fidèlement plats; resp. finis étales) et relèvent  $\varphi_0$ ; les morphismes  $\hat{\psi}_T$  et  $\hat{\psi}^\dagger$  s'identifient à  $\hat{\psi}$ .*

- (3) *Fixons de plus une présentation de la  $\mathcal{V}$ -algèbre  $A$*

$$A = \mathcal{V}[t_1, \dots, t_n]/(f_1, \dots, f_r)$$

*et reprenons les notations du (3) du théorème (3.1). On a les mêmes carrés cartésiens, mais où cette fois  $\hat{\psi}$  est un relèvement fini (resp. fini et plat; resp. fini et fidèlement plat; resp. fini étale) de  $\varphi_0$  et où  $\theta, \theta', \hat{\theta}, \hat{\theta}'$  sont finis. De plus  $\hat{\theta}$  (resp.  $\hat{\theta}'$ ) est plat si et seulement si sa réduction modulo  $I$  est plate.*

*Démonstration de (3.4).*

- (1) L'existence de  $A$  et  $C$  résulte du théorème 6 de Elkik [El] et celle de  $\varphi$  se déduit de la lissité formelle de  $\hat{A}$  sur  $\mathcal{V}$  : donc  $\varphi$  est un morphisme fini [Bour, AC III, § 2, no 11, prop 14].  
On conclut comme dans le théorème 17 de [Et 4].



- (2) et (3) Décomposant les schémas normaux  $\text{Spec } A$ ,  $\text{Spec } C$  en somme de leurs composantes connexes, on peut supposer  $A$  et  $C$  intégralement clos : alors  $\hat{A}$  et  $\hat{C}$  sont aussi intégralement clos [prop (1.7) (4) (iv)], car  $A$  et  $C$  sont excellents. Le théorème de platitude générique [EGA IV, (6.9.1)] prouve alors la surjectivité du morphisme fini  $\text{Spec}(\varphi) : \text{Spec } \hat{C} \rightarrow \text{Spec } \hat{A}$ .

Soient  $L$  le corps des fractions de  $\hat{A}$  et  $L_1$  celui de  $\hat{C}$  : la suite de la démonstration est alors identique celle du théorème (3.1).  $\square$

**Corollaire (3.5).** *Avec  $\mathcal{V}$  comme dans le théorème (3.4) fixons une  $\mathcal{V}$ -algèbre lisse  $A$ . Notons  $\mathcal{C}_f^\dagger$  (resp.  $\mathcal{C}_{fp}^\dagger$  ; resp.  $\mathcal{C}_{ffp}^\dagger$  ; resp.  $\mathcal{C}_{f\acute{e}t}^\dagger$ ) la catégorie des  $A^\dagger$ -algèbres finies  $B$  (resp. finies et plates ; resp. finies et fidèlement plates ; resp. finies étales) telles que  $B$  soit formellement lisse sur  $\mathcal{V}$  pour la topologie  $I$ -adique : on notera  $\hat{\mathcal{C}}$  (resp.  $\tilde{\mathcal{C}}$  ; resp.  $\overset{\circ}{\mathcal{C}}$ ) les catégories analogues obtenues en remplaçant  $A^\dagger$  par  $\hat{A}$  (resp. par  $\tilde{A}$  ; resp. par  $A_0$ ) ; ici on a omis les indices “ $f$ ”, “ $fp$ ” .... Alors*

- (1) *Le foncteur*

$$\mathcal{F} : \mathcal{B} \mapsto \mathcal{B} \otimes_{A^\dagger} \hat{A} \text{ (resp. } \mathcal{F} : \mathcal{B} \mapsto \mathcal{B} \otimes_{\tilde{A}} \hat{A}^\dagger \text{)}$$

*est une équivalence de catégories de la catégorie  $\mathcal{C}_f^\dagger$  (resp.  $\tilde{\mathcal{C}}_f$ ) dans la catégorie  $\hat{\mathcal{C}}_f$  (resp.  $\mathcal{C}_f^\dagger$ ) : on a les mêmes résultats avec les indices  $fp$ ,  $ffp$  et  $f\acute{e}t$ .*

- (2) *Un foncteur quasi-inverse de  $\mathcal{F}$  est fourni par le foncteur  $\mathcal{G}$  qui à une  $\hat{A}$ -algèbre (resp.  $A^\dagger$ -algèbre) finie  $\mathcal{D}$  associe la fermeture intégrale de  $A^\dagger$  (resp.  $\hat{A}$ ) dans  $\mathcal{D}$ .*
- (3) (i) *Le foncteur*

$$\tilde{\mathcal{H}}(\text{resp. } \mathcal{H}^\dagger ; \text{ resp. } \mathcal{H}^\wedge) \mathcal{B} \mapsto \mathcal{B} / I\mathcal{B}$$

*est un foncteur plein et essentiellement surjectif de la catégorie  $\tilde{\mathcal{C}}_f$  (resp.  $\mathcal{C}_f^\dagger$  ; resp.  $\hat{\mathcal{C}}_f$ ) dans la catégorie  $\overset{\circ}{\mathcal{C}}_f$  : on a les mêmes résultats avec les indices  $fp$  et  $ffp$ .*

- (ii) *Le foncteur*

$$\mathcal{H}_{\acute{e}t} : \mathcal{B} \mapsto \mathcal{B} / I\mathcal{B}$$

*est une équivalence de catégories de la catégorie  $\tilde{\mathcal{C}}_{f\acute{e}t}$  (resp.  $\mathcal{C}_{f\acute{e}t}^\dagger$  ; resp.  $\hat{\mathcal{C}}_{f\acute{e}t}$ ) dans la catégorie  $\overset{\circ}{\mathcal{C}}_{f\acute{e}t}$ .*

*Démonstration.*

Le (3) (ii) est ici pour mémoire car montré dans [théo 2.4].

- (1) et (2). On fait la démonstration pour l'indice “ $f$ ”, et  $\mathcal{F} : \mathcal{C}_f^\dagger \rightarrow \hat{\mathcal{C}}_f$ , les autres étant analogues.

Le foncteur  $\mathcal{F}$  est fidèle d'après [EGA IV (2.2.16)].

Prouvons que  $\mathcal{F}$  est essentiellement surjectif. Soit :  $\varphi : \hat{A} \rightarrow C$  un objet de  $\hat{\mathcal{C}}_f$ ; la réduction mod  $I$ ,  $C_0$ , de  $C$  est une  $\mathcal{V}_0$ -algèbre lisse que l'on relève par le théorème de Elkik en une  $\mathcal{V}$ -algèbre lisse  $D$  : par lissité formelle de  $C$  sur  $\mathcal{V}$  il existe un  $\mathcal{V}$ -morphisme  $\hat{\theta}_1 : C \rightarrow \hat{D}$  et c'est un isomorphisme; comme le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} & C & \\ \hat{\theta}_1 \swarrow & \uparrow \varphi & \\ \hat{D} & \dashleftarrow & \hat{A} \\ & \nwarrow & \uparrow \\ & \mathcal{V} & \end{array}$$

on peut voir  $\hat{\theta}_1$  comme un  $\hat{A}$ -isomorphisme au moyen de la flèche en pointillé  $\hat{\theta}_1 \circ \varphi$ . Le théorème (3.4) fournit alors une  $A$ -algèbre finie  $B$ ,  $\psi : A \rightarrow B$ , et un  $\hat{A}$ -isomorphisme

$$\hat{\theta}_2 : \hat{D} \xrightarrow{\sim} \hat{B}$$

s'insérant dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \hat{A} & \xrightarrow{\varphi} & C \\ \hat{\psi} \downarrow & \searrow \simeq & \downarrow \hat{\theta}_1 \\ \hat{B} & \xleftarrow[\hat{\theta}_2]{\simeq} & \hat{D} \end{array}$$

donc  $\varphi \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}(\psi^\dagger : A^\dagger \rightarrow B^\dagger)$  et  $\mathcal{F}$  est essentiellement surjectif.

Prouvons que  $\mathcal{F}$  est plein. Soient  $\varphi : \hat{A} \rightarrow C$  et  $\varphi' : \hat{A} \rightarrow C'$  deux objets de  $\hat{\mathcal{C}}_f$  et  $\lambda : C \rightarrow C'$  un  $\hat{A}$ -morphisme. On vient de montrer qu'il existe des morphismes finis  $\psi : A \rightarrow B$ ,  $\psi' : A \rightarrow B'$  s'insérant dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
\hat{A} & & & & \\
\downarrow \psi & \nearrow \varphi & & & \\
& \hat{B} & \xleftarrow[\theta]{\simeq} & C & \\
\downarrow \lambda' & & & \downarrow \lambda & \\
& \hat{B}' & \xleftarrow[\theta']{\simeq} & C' &
\end{array}$$

où l'on a posé  $\lambda' = \theta' \circ \lambda \circ \theta^{-1}$ . Il s'agit de trouver un  $A^\dagger$ -morphisme  $\lambda^\dagger : B^\dagger \rightarrow B'^\dagger$  induisant  $\lambda'$  par passage aux complétés.

Comme dans le théorème (3.4) on se ramène au cas où  $A, \hat{A}, C$  et  $C'$  sont intégralement clos. On a vu dans la démonstration du théorème (3.4) (semblable à celle de (3.1)) qu'il existe  $a \in A$  et  $f, g \in A_a[X]$  tels que  $\psi_a$  et  $\psi'_a$  soient finis étales et s'identifient aux morphismes canoniques :

$$\psi_a : A_a \rightarrow B_a = A_a[X] / (f)$$

$$\psi'_a : A_a \rightarrow B'_a = A_a[X] / (g);$$

$\hat{\psi}_a, \hat{\psi}'_a$  sont finis étales et s'identifient à

$$(\hat{\psi})_a : (\hat{A})_a \rightarrow (\hat{B})_a = (\hat{A})_a[X] / (f)$$

$$(\hat{\psi}')_a : (\hat{A})_a \rightarrow (\hat{B}')_a = (\hat{A})_a[X] / (g)$$

et font commuter le triangle dont les flèches sont finies étales

$$\begin{array}{ccccc}
\widehat{(A_a)} = \widehat{((\hat{A})_a)} & \xrightarrow{((\hat{\psi})_a)} & \widehat{((\hat{B})_a)} = \widehat{(B_a)} & & \\
& \searrow & \downarrow & & \\
& & \widehat{((\hat{B}')_a)} = \widehat{(B'_a)} & &
\end{array}$$

Par l'équivalence de (3) (ii) il existe un morphisme  $\rho$  fini étale, qui relève  $(\hat{\lambda}'_a)$  et fait commuter le triangle

$$\begin{array}{ccc}
(A_a)^\dagger & \xrightarrow{(\psi_a)^\dagger} & (B_a)^\dagger \\
& \searrow & \downarrow \rho \\
& & (B'_a)^\dagger
\end{array}$$

D'après la proposition 2 de [Et 5] on a les égalités

$$A^\dagger = (A_a)^\dagger \cap \hat{A}, \quad B^\dagger = (B_a)^\dagger \cap \hat{B} \quad , \quad B'^\dagger = (B'_a)^\dagger \cap \hat{B}' ;$$

comme  $\rho$  et  $\lambda'$  induisent tous deux  $(\hat{\lambda}_a)$ , la restriction de  $\rho$  et  $\lambda'$  à  $B^\dagger = (B_a)^\dagger \cap \hat{B}$  fournit le  $A^\dagger$ -morphisme cherché

$$\lambda^\dagger : B^\dagger \rightarrow B'^\dagger .$$

(2) Se démontre comme le (2) (ii) du théorème (2.4).

(3) (i) Il suffit de le prouver pour  $\mathcal{H}^\wedge$ .

On prouve que  $\mathcal{H}^\wedge$  est essentiellement surjectif par une méthode analogue à celle utilisée pour  $\mathcal{F}$  dans le (1) : étant donnée une  $A_0$ -algèbre finie  $B_0$ , on trouve une  $A$ -algèbre finie  $B$  relevant  $B_0$  et donc  $\hat{B}$  est une  $\hat{A}$ -algèbre finie répondant à la question.

Pour montrer que  $\mathcal{H}^\wedge$  est plein on part d'un  $A_0$ -morphisme  $\lambda_0 : B_0 \rightarrow B'_0$  ; avec  $B$  et  $B'$  comme ci-dessus et lissité formelle de  $\hat{B}$  sur  $\mathcal{V}$  on en déduit un  $\mathcal{V}$ -morphisme (en fait un  $\hat{A}$ -morphisme)  $\lambda : \hat{B} \rightarrow \hat{B}'$  qui relève  $\lambda_0$ .  $\square$

**Corollaire (3.6).** *Avec les hypothèses et notations du (3) du théorème (3.4), supposons de plus donné un carré cartésien de  $\mathcal{V}$ -schémas formels*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \hookrightarrow & \overline{\mathcal{X}} \\ h \downarrow & & \downarrow \overline{h} \\ \mathcal{S} & \xhookrightarrow{j} & \overline{\mathcal{S}} \end{array}$$

où  $\overline{h}$  est propre. Alors le  $\mathcal{V}$ -schéma formel  $\mathcal{X}'$  défini par le produit fibré

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X}' & \longrightarrow & \mathcal{X} \\ h' \downarrow & & \downarrow h \\ \mathcal{S}' & \xrightarrow{\hat{\psi}} & \mathcal{S} \end{array}$$

admet une compactification  $\overline{\mathcal{X}'}$  définie par le cube à faces cartésiennes

$$\begin{array}{ccccc}
& & \mathcal{X} & \xrightarrow{\quad} & \overline{\mathcal{X}} \\
& \nearrow & \vdots & & \nearrow \\
\mathcal{X}' & \xrightarrow{h} & \overline{\mathcal{X}'} & \xrightarrow{\theta'} & \overline{\mathcal{X}} \\
& \downarrow & \vdots & & \downarrow \bar{h} \\
& & \mathcal{S} & \xrightarrow{j} & \overline{\mathcal{S}} \\
& \nearrow \hat{\psi} & \vdots & & \nearrow \hat{\theta} \\
\mathcal{S}' & \xrightarrow{j'} & \overline{\mathcal{S}'} & & \\
& & \downarrow & & \\
& & \mathcal{S} & & 
\end{array}$$

où  $\hat{\theta}$  est fini.

De plus on a les mêmes résultats en remplaçant  $\overline{\mathcal{S}}$  par  $\tilde{\mathcal{S}}$ .

*Démonstration.* Comme  $j'$  est une immersion ouverte il en est de même de  $\mathcal{X}' \rightarrow \overline{\mathcal{X}'}$ . De plus  $\overline{\mathcal{X}'} \rightarrow \overline{\mathcal{X}}$  est fini puisque  $\hat{\theta}$  l'est [théo (3.4) (3)]; d'où le corollaire.  $\square$

**Corollaire (3.7).** *Avec les hypothèses et notations du théorème (3.4), supposons de plus  $\varphi_0$  fini étale galoisien du groupe  $G$ . Alors*

- (1)  $\hat{\psi} : \mathcal{S}' = \text{Spf } \hat{B} \rightarrow \mathcal{S} = \text{Spf } \hat{A}$  est fini étale galoisien de groupe  $G$ .
- (2) On a un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{S}'_0 & \xrightarrow{j'_0} & \overline{\mathcal{S}'_0} \\
h_0 \downarrow & & \downarrow \bar{h}_0 \\
\mathcal{S}_0 & \xrightarrow{j_0} & \overline{\mathcal{S}_0}
\end{array}$$

où  $h_0 = \text{Spec } \varphi_0 = \hat{\psi} \bmod I$ ,  $\overline{\mathcal{S}_0}$  et  $\overline{\mathcal{S}'_0}$  sont propres sur  $\mathcal{V}_0$  et normaux,  $\bar{h}_0$  est fini, et  $j_0, j'_0$  sont des immersions ouvertes dominantes. De plus  $G$  agit sur  $\overline{\mathcal{S}'_0}$  par  $\overline{\mathcal{S}_0}$ -automorphismes et on a un isomorphisme

$$\mathcal{O}_{\overline{\mathcal{S}_0}} \xrightarrow{\sim} (\bar{h}_{0*}(\mathcal{O}_{\overline{\mathcal{S}'_0}}))^G.$$

*Démonstration.*

Le (1) est classique.

Dans le (2) on prend pour  $\overline{\mathcal{S}_0}$  le normalisé de  $\widehat{P'} \bmod I$ , et pour  $\overline{\mathcal{S}'_0}$  la fermeture intégrale de  $\mathcal{S}'_0$  dans  $\overline{\mathcal{S}_0}$ ; d'où le carré cartésien ci-dessus, et un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc}
j_{0*}h_{0*}\mathcal{O}_{S'_0} = \bar{h}_{0*}j'_{0*}\mathcal{O}_{S'_0} & \longleftarrow & \bar{h}_{0*}\mathcal{O}_{\bar{S}'_0} \\
\uparrow \varphi_0 & & \uparrow \\
j_{0*}\mathcal{O}_{s_0} & \xleftarrow{j_{\bar{S}}} & \mathcal{O}_{\bar{S}_0}
\end{array}$$

à flèches horizontales injectives.

Pour l'action de  $G$  on peut supposer  $S_0$  connexe, donc intégralement clos puisqu'il est lisse sur  $\mathcal{V}_0$  : alors  $\bar{S}_0$  est intègre et normal, donc  $\mathcal{O}_{\bar{S}_0}$  est un faisceau d'anneaux intégralement clos, de corps des fractions celui de  $\mathcal{O}_{S_0}$ .

Considérons  $g \in G$  et une section  $x$  de  $\bar{h}_{0*}\mathcal{O}_{\bar{S}'_0}$  : alors  $g(x)$  est une section de  $j_{0*}h_{0*}\mathcal{O}_{S'_0}$  qui est entière sur  $\mathcal{O}_{\bar{S}_0}$ , donc  $g(x)$  est en fait une section de  $\bar{h}_{0*}\mathcal{O}_{\bar{S}'_0}$  car  $\bar{S}'_0$  est la fermeture intégrale de  $\bar{S}_0$  dans  $S'_0$ .

Si l'on suppose de plus  $x$  fixe par  $G$ , alors  $x$  est une section de  $j_{0*}\mathcal{O}_{S_0}$  car  $\varphi_0$  est galoisien de groupe  $G$  ; or  $x$  est entière sur  $\mathcal{O}_{\bar{S}_0}$ , donc  $x$  est une section de  $\mathcal{O}_{\bar{S}_0}$  puisque  $\mathcal{O}_{\bar{S}_0}$  est intégralement clos. D'où le corollaire.  $\square$



## II. Espaces rigides analytiques et images directes

### 0. Notations

Pour les notions sur les espaces rigides analytiques nous renvoyons le lecteur à [B 3] et [B-G-R]. Sauf mention contraire dans tout ce II on désigne par  $\mathcal{V}$  un anneau de valuation discrète complet, de corps résiduel  $k = \mathcal{V}/\mathfrak{m}$  de caractéristique  $p > 0$ , de corps des fractions  $K$  de caractéristique 0, d'uniformisante  $\pi$  et d'indice de ramification  $e$ .

On suppose donné un entier  $a \in \mathbb{N}^*$  et on désigne par  $C(k)$  un anneau de Cohen de  $k$  de caractéristique 0 [Bour, AC IX, § 2,  $n^\circ 3$ , prop 5] :  $C(k)$  est un anneau de valuation discrète complet d'idéal maximal  $p C(k)$  [EGA  $O_{IV}$ , 19.8.5] et on note  $K_0$  son corps des fractions,  $K_0 = \text{Frac}(C(k))$ . Il existe une injection fidèlement plate  $C(k) \hookrightarrow \mathcal{V}$  qui fait de  $\mathcal{V}$  un  $C(k)$ -module libre de rang  $e$  [EGA  $O_{IV}$ , 19.8.6, 19.8.8] et [Bour, AC IX, § 2,  $n^\circ 1$ , prop 2]. On fixe un relèvement  $\sigma : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$  de la puissance  $a^{\text{ième}}$  du Frobenius absolu de  $k$ , tel que  $\sigma(\pi) = \pi$  comme dans [Et 5, I, 1.1] (un tel  $\sigma$  existe d'après loc. cit.); on notera encore  $\sigma$  l'extension naturelle de  $\sigma$  à  $K$  : lorsque  $k$  est parfait  $C(k)$  est isomorphe à l'anneau  $W(k)$  des vecteurs de Witt de  $k$  et  $\sigma$  est un automorphisme de  $K$ . Si  $k \hookrightarrow k'$  est une extension de corps de caractéristique  $p > 0$ ,  $\mathcal{V}' := \mathcal{V} \otimes_{C(k)} C(k')$ ,  $K' = \text{Frac}(\mathcal{V}')$ , on peut relever la puissance  $a^{\text{ième}}$  du Frobenius absolu de  $k'$  en un morphisme  $\sigma' : K' \rightarrow K'$  au-dessus de  $\sigma : K \rightarrow K$  [Et 5, I, 1.1].



# 1. Changement de base pour un morphisme propre

Le théorème suivant est un préalable pour les théorèmes de changement de base en géométrie rigide.

**Théorème (1.1).** *Soient  $\mathcal{V}$  un anneau noethérien et  $I \not\subseteq \mathcal{V}$  un idéal; on suppose  $\mathcal{V}$  séparé et complet pour la topologie  $I$ -adique. Soit*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X}' & \xrightarrow{v} & \mathcal{X} \\ g \downarrow & & \downarrow f \\ \mathcal{S}' & \xrightarrow{u} & \mathcal{S} \end{array}$$

*un carré cartésien de  $\mathcal{V}$ -schémas formels (pour la topologie  $I$ -adique) de type fini, avec  $f$  propre.*

- (1) *Soit  $\mathcal{F}$  un  $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -module cohérent. Alors, pour tout entier  $i \geq 0$ ,  $R^i f_*(\mathcal{F})$  est un  $\mathcal{O}_{\mathcal{S}}$ -module cohérent et le morphisme de changement de base*

$$u^* R^i f_*(\mathcal{F}) \longrightarrow R^i g_* v^*(\mathcal{F})$$

*est un isomorphisme.*

- (2) *Soient  $\mathcal{E}_{\mathcal{X}}^{\bullet}$  un complexe borné de  $\mathcal{O}_{\mathcal{S}}$ -modules plats, à composantes des  $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -modules cohérents et  $\mathcal{E}_{\mathcal{X}'}^{\bullet} = \mathcal{E}_{\mathcal{X}}^{\bullet} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{S}}} \mathcal{O}_{\mathcal{S}'}$ . On suppose  $\mathcal{S}$  plat sur  $\mathcal{V}$  et  $u$  plat. Alors, pour tout entier  $i \geq 0$ ,  $R^i f_*(\mathcal{E}_{\mathcal{X}}^{\bullet})$  est un  $\mathcal{O}_{\mathcal{S}}$ -module cohérent et le morphisme de changement de base*

$$u^* R^i f_*(\mathcal{E}_{\mathcal{X}}^{\bullet}) \xrightarrow{\sim} R^i g_*(\mathcal{E}_{\mathcal{X}'}^{\bullet})$$

*est un isomorphisme, qui s'interprète aussi comme un isomorphisme*

$$\varprojlim_n u_n^* R^i f_{n*}(\mathcal{E}_{X_n}^{\bullet}) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_n R^i g_{n*}(\mathcal{E}_{X'_n}^{\bullet}) ;$$

*(cf. notations plus bas).*

*Démonstration.*

- (1) La cohérence de  $R^i f_*(\mathcal{F})$  sur  $\mathcal{O}_{\mathcal{S}}$  est rappelée pour mémoire [EGA III, (3.4.2)]. Notons  $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}/I^{n+1}\mathcal{F}$  et  $\varphi_n$  le morphisme canonique  $\varphi_n : R^i f_*(\mathcal{F}) \rightarrow R^i f_*(\mathcal{F}_n)$ . Posons  $C_n = \text{Coker } \varphi_n$ ,  $\mathcal{H} = R^i f_*(\mathcal{F})$ ,  $\mathcal{H}_n = R^i f_*(\mathcal{F}_n)$  et  $\mathcal{H}'_n = \mathcal{H}/I^{n+1}\mathcal{H}$ . Comme  $I^{n+1}\mathcal{H} \subset \text{Ker } \varphi_n$  on a une surjection

$$\mathcal{H}'_n \twoheadrightarrow \mathcal{H}/\text{Ker } \varphi_n$$

de noyau noté  $K_n$ . Dans les suites exactes

$$(1.1.1) \quad 0 \longrightarrow K_n \longrightarrow \mathcal{H}'_n \longrightarrow \mathcal{H}/\text{Ker } \varphi_n \longrightarrow 0$$

$$(1.1.2) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{H}/\text{Ker } \varphi_n \longrightarrow \mathcal{H}_n \longrightarrow C_n \longrightarrow 0,$$

les systèmes projectifs  $(\mathcal{H}'_n)_n$  et  $(\mathcal{H}/\text{Ker } \varphi_n)_n$  vérifient la condition de Mittag-Leffler (notée M-L) car les flèches de transition sont surjectives. De plus  $(\mathcal{H}_n)_n$  vérifie M-L d'après [EGA III, (3.4.3)], donc  $(C_n)_n$  aussi [EGA  $O_{III}$ , (13.2.1)]. D'où l'exactitude de la suite

$$(1.1.3) \quad 0 \longrightarrow \varprojlim_n \mathcal{H}/\text{Ker } \varphi_n \longrightarrow \varprojlim_n \mathcal{H}_n \longrightarrow \varprojlim_n C_n \longrightarrow 0.$$

D'autre part on a un isomorphisme [EGA III, (3.4.3)]

$$R^i f_*(\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_n \mathcal{H}_n ;$$

comme  $R^i f_*(\mathcal{F})$  est un  $\mathcal{O}_S$ -module cohérent [EGA III, (3.4.2)], il est séparé et complet pour la topologie  $I$ -adique, donc on a aussi un isomorphisme

$$R^i f_*(\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_n \mathcal{H}'_n.$$

Ainsi le morphisme composé

$$\varprojlim_n \mathcal{H}'_n \longrightarrow \varprojlim_n \mathcal{H}/\text{Ker } \varphi_n \hookrightarrow \varprojlim_n \mathcal{H}_n$$

est un isomorphisme, donc chacune des flèches est un isomorphisme (car la seconde est injective par (1.1.3)). Par suite  $\varprojlim_n C_n = 0$ ; comme  $(C_n)_n$  vérifie ML, on en déduit que le pro-objet  $\ll (C_n)_n \gg$  associé est le pro-objet nul [G 1, 195-03, §2], i.e. pour tout  $n$ , il existe  $n' \geq n$  tel que  $C_{n'} \rightarrow C_n$  soit la flèche nulle. On a donc un isomorphisme de pro-objets

$$\ll \mathcal{H}/\text{Ker } \varphi_n \gg \xrightarrow{\sim} \ll (\mathcal{H}_n)_n \gg.$$

De la même façon  $\ll (K_n)_n \gg$  est le pro-objet nul, d'où un isomorphisme de pro-objets

$$\ll (\mathcal{H}'_n)_n \gg \xrightarrow{\sim} \ll (\mathcal{H}/\text{Ker } \varphi_n)_n \gg,$$

et par composition avec le précédent, un isomorphisme de pro-objets

$$(1.1.4) \quad \ll (\mathcal{H}'_n)_n \gg \xrightarrow{\sim} \ll (\mathcal{H}_n)_n \gg .$$

En notant  $\mathcal{C}$  (resp.  $\mathcal{C}'$ ; resp.  $\text{Pro } \mathcal{C}$ ) la catégorie des  $\mathcal{O}_S$ -modules (resp. des  $\mathcal{O}_{S'}$ -modules; resp. des pro-objets de  $\mathcal{C}$ ) le foncteur  $u^* : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  s'étend en un foncteur  $\tilde{u}^* : \text{Pro } \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ . Comme  $u^*(\mathcal{H})$  est un  $\mathcal{O}_{S'}$ -module cohérent il est séparé et complet pour la topologie  $I$ -adique, d'où un isomorphisme

$$u^*(\mathcal{H}) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_n u^*(\mathcal{H}'_n) ;$$

or  $(\mathcal{H}_n)_n$  et  $(\mathcal{H}'_n)_n$  vérifient M.L, donc d'après [G 1, 195-05, fin du § 2] et (1.1.4) on a des isomorphismes

$$\begin{aligned} u^*(\mathcal{H}) &\xrightarrow{\sim} \varprojlim_n u^*(\mathcal{H}'_n) \\ &\simeq \tilde{u}^*(\ll (\mathcal{H}'_n)_n \gg) \text{ [G1, 195]} \\ &\simeq \tilde{u}^*(\ll (\mathcal{H}_n)_n \gg) \text{ (1.1.4)} \\ &\simeq \varprojlim_n u^*(\mathcal{H}_n) \text{ [G 1, 195]} \\ &\simeq \varprojlim_n u_n^*(\mathcal{H}_n) \end{aligned}$$

où l'on note

$$\begin{array}{ccc} X'_n & \xrightarrow{v_n} & X_n \\ g_n \downarrow & & \downarrow f_n \\ S'_n & \xrightarrow{u_n} & S_n \end{array}$$

le carré cartésien déduit de celui de la proposition par réduction mod  $I^{n+1}$ .

Or le théorème de changement de base pour un morphisme propre [SGA 4, T3, XII, théo 5.1] fournit un isomorphisme

$$u_n^*(\mathcal{H}_n) = u_n^*(R^i f_{n*}(\mathcal{F}_n)) \xrightarrow{\sim} R^i g_{n*}(v_n^*(\mathcal{F}_n)),$$

d'où

$$\begin{aligned} u^*(R^i f_*(\mathcal{F})) &\xrightarrow{\sim} \varprojlim_n R^i g_{n*}(v_n^*(\mathcal{F}_n)) = \varprojlim_n R^i g_*(v_n^*(\mathcal{F}_n)) \\ &\xrightarrow{\sim} R^i g_*(v^*(\mathcal{F})) \text{ [EGA III, (3.4.3)].} \end{aligned}$$

D'où le (1) du théorème.

(2) On note  $\mathcal{V}_n = \mathcal{V}/I^{n+1}$ ,  $\mathcal{E}_{X_n}^\bullet = \mathcal{E}_{\mathcal{X}}^\bullet/I^{n+1}\mathcal{E}_{\mathcal{X}}^\bullet$  et  $\mathcal{E}_{X'_n}^\bullet = \mathcal{E}_{\mathcal{X}'}^\bullet/I^{n+1}\mathcal{E}_{\mathcal{X}'}^\bullet$ .

D'après [SGA 4, XVII, théo 4.3.1] on a un isomorphisme dans la catégorie dérivée des  $\mathcal{V}_{n-1}$ -modules sur  $S'_{n-1}$  :

$$\mathcal{V}_{n-1} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{V}_n} \mathbb{R}f_{n*}(\mathcal{E}_{X_n}^\bullet) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}f_{n-1*}(\mathcal{V}_{n-1} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{V}_n} \mathcal{E}_{X_n}^\bullet).$$

D'après les hypothèses,  $\mathcal{E}_{X_n}^\bullet$  est à composantes plates sur  $\mathcal{V}_n$  ( $\mathcal{S}$  est plat sur  $\mathcal{V}$ ) d'où un isomorphisme

$$\mathcal{V}_{n-1} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{V}_n} \mathcal{E}_{X_n}^\bullet \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_{X_{n-1}}^\bullet.$$

Or on a un isomorphisme

$$\mathcal{V}_{n-1} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{V}_n} \mathbb{R}f_{n*}(\mathcal{E}_{X_n}^\bullet) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{S_{n-1}} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_{S_n}} \mathbb{R}f_{n*}(\mathcal{E}_{X_n}^\bullet),$$

d'où un isomorphisme

$$(1.1.5) \quad \mathbb{R}f_{n*}(\mathcal{E}_{X_n}^\bullet) \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_{S_n}} \mathcal{O}_{S_{n-1}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}f_{n-1*}(\mathcal{E}_{X_{n-1}}^\bullet).$$

Comme  $R^{i+j}f_{n*}(\mathcal{E}_{X_n}^\bullet)$  est l'aboutissement d'une suite spectrale de terme  $E_1^{i,j}$  donné par

$$E_1^{i,j} = R^j f_{n*}(\mathcal{E}_{X_n}^i)$$

et que  $E_1^{i,j}$  est cohérent sur  $\mathcal{O}_{S_n}$  puisque  $f_n$  est propre, on en déduit que  $R^{i+j}f_{n*}(\mathcal{E}_{X_n}^\bullet)$  est cohérent sur  $\mathcal{O}_{S_n}$ , donc grâce à (1.1.5) et [B-O, page B-4], que  $(R^i f_{n*}(\mathcal{E}_{X_n}^\bullet))_n$  est un objet "consistant" au sens de loc. cit : par suite [B-O, page B-7] on a des isomorphismes canoniques de  $\mathcal{O}_{\mathcal{S}}$ -modules cohérents

$$(1.1.6) \quad H^i(\mathbb{R} \varprojlim_n \mathbb{R}f_{n*}(\mathcal{E}_{X_n}^\bullet)) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_n R^i f_{n*}(\mathcal{E}_{X_n}^\bullet).$$

Dans la démonstration du (1) on a rappelé l'isomorphisme (pour tout  $\mathcal{O}_X$ -module cohérent  $\mathcal{F}$ )

$$\begin{aligned} R^i f_*(\mathcal{F}) &\xrightarrow{\sim} \varprojlim_n R^i f_{n*}(\mathcal{F}_n) \\ &\simeq H^i(\mathbb{R} \varprojlim_n \mathbb{R} f_{n*}(\mathcal{F}_n)) \end{aligned}$$

[B-O, page B-7],  
d'où un isomorphisme

$$(1.1.7) \quad \mathbb{R} f_*(\mathcal{E}_X^\bullet) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R} \varprojlim_n \mathbb{R} f_{n*}(\mathcal{E}_{X_n}^\bullet),$$

i.e. compte tenu de (1.1.6)

$$(1.1.8) \quad R^i f_*(\mathcal{E}_X^\bullet) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_n R^i f_{n*}(\mathcal{E}_{X_n}^\bullet),$$

et c'est un  $\mathcal{O}_S$ -module cohérent.

Puisque  $u_n$  est plat, le théorème de changement de base [SGA 4, XVII, théo (4.3.1)] fournit un isomorphisme

$$u_n^* \mathbb{R} f_{n*}(\mathcal{E}_{X_n}^\bullet) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R} g_{n*}(\mathcal{E}_{X'_n}^\bullet),$$

et par application de  $\mathbb{R} \varprojlim_n$  un isomorphisme

$$(1.1.9) \quad u^* \mathbb{R} f_*(\mathcal{E}_X^\bullet) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R} g_*(\mathcal{E}_{X'}^\bullet).$$

En passant à la cohomologie on obtient les isomorphismes annoncés au (2) du théorème (1.1).  $\square$

**Théorème (1.2).** *Soient  $\mathcal{V}$  un anneau de valuation discrète séparé et complet pour la topologie  $\mathfrak{m}$ -adique, où  $\mathfrak{m}$  est son idéal maximal,  $k = \mathcal{V}/\mathfrak{m}$  son corps résiduel supposé de caractéristique  $p > 0$ ,  $K$  son corps des fractions de caractéristique 0.*

*Soit*

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{v} & X \\ g \downarrow & & \downarrow f \\ S' & \xrightarrow{u} & S \end{array}$$

un carré cartésien de  $K$ -espaces analytiques rigides, avec  $f$  propre.

(1.2.1) Soit  $E$  un  $\mathcal{O}_X$ -module cohérent. Alors, pour tout entier  $i \geq 0$ ,

- (1)  $R^i f_*(E)$  est un  $\mathcal{O}_S$ -module cohérent.
- (2) Le morphisme de changement de base

$$u^*(R^i f_*(E)) \longrightarrow R^i g_*(v^*(E))$$

est un isomorphisme.

(1.2.2) Soient  $E^\bullet$  un complexe borné de  $\mathcal{O}_S$ -modules plats, à composantes des  $\mathcal{O}_X$ -modules cohérents et  $E'^\bullet = E^\bullet \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S'}$ . On suppose  $u$  plat. Alors pour tout entier  $i \geq 0$

- (1)  $R^i f_*(E^\bullet)$  est un  $\mathcal{O}_S$ -module cohérent.
- (2) Le morphisme de changement de base

$$u^* R^i f_*(E^\bullet) \longrightarrow R^i g_*(E'^\bullet)$$

est un isomorphisme.

*Démonstration du théorème (1.2).*

**1ère étape.** Supposons d'abord démontré le théorème dans le cas où les  $K$ -espaces analytiques rigides sont tous quasi-compacts et quasi-séparés.

Prouvons (1.2.1) dans ce cas. L'assertion (1) est locale sur  $S$  puisque  $R^i f_*(E)$  est le faisceau associé au préfaisceau

$$V \mapsto H^i(f^{-1}(V), E)$$

où  $V$  parcourt les ouverts de  $S$  [SGA 4, V, prop 5.1].

Soient  $\psi : V \hookrightarrow S$  un ouvert affinoïde de  $S$  et  $W$  défini par le carré cartésien

$$(1.2.1.1) \quad \begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{\theta} & X \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ V & \xrightarrow{\psi} & S \end{array} \quad ;$$

d'après [loc. cit.] on a alors un isomorphisme canonique

$$\psi^* R^i f_*(E) \cong R^i f'_*(\theta^*(E)).$$

Or ici  $V$  est quasi-compact, quasi-séparé, et  $W$  aussi car  $f'$  est propre ; d'où l'assertion (1) via le cas quasi-compact, quasi-séparé.

Pour le (2) on reprend le carré cartésien (1.2.1.1) : soient

$$u' : V' = V \times_S S' \longrightarrow V$$

et  $u'' : V'' \hookrightarrow V'$  un ouvert affinoïde de  $V'$ ,

et on considère le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & X' & \xlongequal{\quad} & X' & \xrightarrow{v} & X \\
 & \nearrow \theta'' & \vdots & & \nearrow \theta' & & \nearrow \theta \\
 W'' & \xrightarrow{v''} & W' & \xrightarrow{v'} & W & & \\
 \downarrow g'' & & \downarrow g & & \downarrow g & & \downarrow f \\
 & \nearrow \psi'' & S' & \xlongequal{\quad} & S' & \xrightarrow{u} & S \\
 & \searrow \psi' & \vdots & & \searrow \psi' & & \searrow \psi \\
 V'' & \xrightarrow{u''} & V' & \xrightarrow{u'} & V & & 
 \end{array}$$

dont les faces verticales sont cartésiennes.

Vu le caractère local de l'isomorphisme (2) cherché, il suffit de montrer que l'on a un isomorphisme

$$\psi''^* u^* R^i f_*(E) \xrightarrow{\sim} \psi''^* R^i g_* v^*(E).$$

Or ici  $V$  et  $V''$  sont quasi-compacts, quasi-séparés, donc  $W$  et  $W''$  aussi car  $f'$  et  $g''$  sont propres et on peut appliquer l'isomorphisme de changement de base du cas quasi-compact, quasi-séparé pour le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc}
 W' & \xrightarrow{v' \circ v''} & W \\
 g'' \downarrow & & \downarrow f' \\
 V'' & \xrightarrow{u' \circ u''} & V
 \end{array} \quad ;$$

d'où une suite d'isomorphismes

$$\psi''^* u^* R^i f_*(E) = (u' u'')^* \psi^* R^i f_*(E)$$

$$\begin{aligned}
&= (u'u'')^* R^i f'_*(\theta^*(E)) \\
&\simeq R^i g''_*((v'v'')^*(\theta^*(E))) \\
&= R^i g''_*(\theta''^*(v^*(E))) \\
&= \psi''^* R^i g_*(v^*(E)).
\end{aligned}$$

D'où le (2).

Pour prouver (1.2.2) à partir du cas quasi-compact, quasi-séparé la démarche est analogue.

**2ème étape.** Prouvons le théorème dans le cas quasi-compact, quasi-séparé.

(1.2.1.) Le (1) est un théorème de Lütkebohmert [Lü, theo 2.7].

Pour le (2) on adopte les notations de [Bo-Lü 1, démonstration de 4.1] : d'après [loc. cit.] il existe des modèles formels  $\overset{\circ}{\mathcal{X}}$ ,  $\mathcal{S}$ ,  $\overset{\circ}{\mathcal{S}'}$  de  $X, S, S'$  respectivement et des éclatements admissibles

$$\tau_{\mathcal{X}} : \mathcal{X} \rightarrow \overset{\circ}{\mathcal{X}} \quad , \quad \tau_{\mathcal{S}'} : \mathcal{S}' \rightarrow \overset{\circ}{\mathcal{S}'}$$

et des morphismes

$$\varphi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{S} \quad , \quad \theta : \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}$$

tels que

$$\varphi_{\text{rig}} = f \circ \tau_{\mathcal{X}\text{rig}} \quad \text{et} \quad \theta_{\text{rig}} = u \circ \tau_{\mathcal{S}'\text{rig}}.$$

Remarquons que tous les schémas formels précédents sont admissibles au sens de [Bo - Lü 1], donc sont plats sur  $\mathcal{V}$  [Bo - Lü 1, § 1].

On dispose donc d'un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{X}' & \xrightarrow{\theta'} & \mathcal{X} \\
\varphi' \downarrow & & \downarrow \varphi \\
\mathcal{S}' & \xrightarrow{\theta} & \mathcal{S}
\end{array} \quad ,$$

qui est un modèle formel du carré du théorème : de plus il existe un  $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -module cohérent  $\mathcal{F}$  tel que  $\mathcal{F}_{\text{rig}} = E$  [Lü, 2.2], ou [Bo-Lü 1, 5.6] et  $\varphi$  est un morphisme propre [Lü, 2.6]. D'après le théorème (1.1) le morphisme de changement de base

$$\theta^* R^i \varphi_*(\mathcal{F}) \rightarrow R^i \varphi'_* \theta'^*(\mathcal{F})$$

est un isomorphisme ; par passage aux fibres génériques le (1.2.1) en résulte.



(1.2.2) Par définition [Bo-Lü 1, § 5] un  $\mathcal{O}_X$ -module cohérent  $M$  est plat sur  $S$ , s'il existe un modèle formel  $h : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{S}$  de  $f$  et un  $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -module cohérent  $\mathcal{M}$  tels que  $\mathcal{M}$  est plat sur  $\mathcal{S}$  aux points de  $\mathcal{X}_K$  (i.e. tels que  $\mathcal{M}$  est rig-plat sur  $\mathcal{S}$ ) : l'existence de  $h$  résulte de [Bo-Lü 1, theo 4.1] et celle de  $\mathcal{M}$  résulte de [Lü, lemma 2.2] où l'on peut évidemment supposer  $\mathcal{M}$  sans  $\pi$ -torsion.

**Lemme (1.2.2.1).** *Avec les notations précédentes, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i)  $M$  est plat sur  $S$ .
- (ii)  $\mathcal{M}$  est rig-plat sur  $\mathcal{S}$ .
- (iii)  $\mathcal{M}_K$  est un  $\mathcal{O}_{S_K}$ -module plat.

De plus le  $\mathcal{M}$  du (ii) peut être supposé sans  $\pi$ -torsion : si  $\mathcal{S} = \mathrm{Spf} \mathcal{V}$  le (ii) revient à dire que  $\mathcal{M}$  est plat sur  $\mathcal{V}$  ( $\mathcal{V}$  = anneau de valuation discrète complet).

*Démonstration du lemme.* Par définition (i) et (ii) sont équivalentes. Prouvons l'équivalence de (ii) et (iii). Puisque la notion de platitude est locale sur  $X$  et  $S$  [Bo-Lü 1, § 5], on peut supposer  $\mathcal{X}$  et  $\mathcal{S}$  affines,  $\mathcal{X} = \mathrm{Spf} \hat{A}$  et  $\mathcal{S} = \mathrm{Spf} \hat{B}$  où  $A$  et  $B$  sont des  $\mathcal{V}$ -algèbres de type fini. On note encore  $\mathcal{M} = \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{M})$ . Ici les “rig-points” au sens de [Bo-Lü 1, § 3] sont les relèvements de Teichmüller  $\hat{\tau}(x)$  au sens de [Et 6, 2.1] :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathfrak{p}_x & \longrightarrow & \hat{A} & \xrightarrow{\hat{\tau}(x)} & \mathcal{V}(x) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathfrak{q}_x & \longrightarrow & \hat{A}_K & \xrightarrow{\hat{\tau}_K(x)} & K(x) \longrightarrow 0 \end{array} \quad .$$

D'après [Bo-Lü 1], dire que  $\mathcal{M}$  est rig-plat sur  $\hat{B}$  c'est dire que  $\mathcal{M}_{\mathfrak{p}_x}$  est plat sur  $\hat{B}$  : or d'après [Bour, AC II, § 2, n° 5, prop 11(iii)] on a un isomorphisme

$$\mathcal{M}_{\mathfrak{p}_x} \xrightarrow{\sim} (\mathcal{M}_K)_{\mathfrak{q}_x} ,$$

d'où l'équivalence du lemme.  $\square$

Alors par [Bo-Lü 2, theo 4.1 et cor 5.9] et quitte à faire un éclatement formel de  $\mathcal{S}$  on peut supposer  $\mathcal{M}$  plat sur  $\mathcal{O}_{\mathcal{S}}$ .

Revenons à la preuve de (1.2.2) : le complexe  $E^\bullet$  provient d'un complexe  $\mathcal{E}^\bullet$  de  $\mathcal{O}_{\mathcal{S}}$ -modules, à composantes  $\mathcal{E}^i$  des  $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -modules cohérents, et on vient de voir que, quitte à éclater formellement  $\mathcal{S}$ , on peut supposer les  $\mathcal{E}^i$  plats

sur  $\mathcal{O}_S$ .

Il suffit alors d'appliquer le (2) du théorème (1.1) et de passer aux fibres génériques pour obtenir (1.2.2).

Nous rassemblons pour mémoire dans la proposition suivante quelques propriétés des immersions.

**Proposition (1.3).** *Soient  $\mathcal{V}$  et  $K$  comme en (1.2). Alors*

- (1.3.1) *Toute immersion (resp. immersion ouverte, resp. immersion fermée)  $\alpha : X \hookrightarrow Y$  de  $K$ -espaces rigides analytiques quasi-compacts et quasi-séparés admet un modèle formel  $\beta : \mathcal{X} \hookrightarrow \mathcal{Y}$  au sens de [Bo-Lü 2, cor 5.10] qui est une immersion (resp. une immersion ouverte, resp. une immersion fermée) : en particulier  $\mathcal{X}$  et  $\mathcal{Y}$  sont plats sur  $\mathcal{V}$ .*
- (1.3.2) *Pour tout  $K$ -espace analytique rigide  $X$ , le faisceau d'anneaux  $\mathcal{O}_X$  est cohérent.*
- (1.3.3) *Soient  $\alpha : X \hookrightarrow Y$  une immersion fermée de  $K$ -espaces analytiques rigides et  $M$  un  $\mathcal{O}_X$ -module cohérent. Alors, pour tout entier  $i > 0$  on a*

$$R^i \alpha_*(M) = 0$$

*et le morphisme canonique*

$$\alpha^* \alpha_*(M) \rightarrow M$$

*est un isomorphisme.*

*De plus le morphisme  $\alpha_*$  commute à tout changement de base plat  $u : Y' \rightarrow Y$ .*

*Démonstration.* Le (1.3.1) n'est autre que [Bo-Lü 2, cor 5.10].

Pour le (1.3.2) la propriété est locale sur  $X$  [B-G-R, 9.4.3] : on peut donc supposer  $X$  affinoïde ; par suite  $X$  est quasi-compact et quasi-séparé et admet un modèle formel  $\mathcal{X}$ . Il suffit de prouver la cohérence du faisceau d'anneaux  $\mathcal{O}_X$  : comme  $\mathcal{X}$  est un schéma formel de type fini sur l'anneau noethérien  $\mathcal{V}$ , le faisceau  $\mathcal{O}_X$  est un faisceau cohérent d'anneaux par [EGA I, (10.11.2)].

Pour (1.3.3), l'immersion fermée  $\alpha$  est propre [B-G-R, 9.5.3, prop 2, 9.6.2 prop 5] d'où l'isomorphisme canonique

$$\alpha^* \alpha_*(M) \xrightarrow{\sim} M$$

grâce au théorème (1.2) ; de même pour la commutation de  $\alpha_*$  aux changements de base plats.

L'assertion  $R^i \alpha_*(M) = 0$  pour  $i > 0$  est locale sur  $Y$  : on peut donc supposer  $Y$  affinoïde, donc quasi-compact, quasi-séparé et de même pour  $X$  puisque  $\alpha$  est propre. On prend alors un modèle formel  $\beta : \mathcal{X} \hookrightarrow \mathcal{Y}$  de  $\alpha$  et un  $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -module cohérent  $\mathcal{M}$  tel que  $\mathcal{M}_K = M$  [Lü, lemma 2.2]. Soient  $\beta_n : \mathcal{X}_n \hookrightarrow \mathcal{Y}_n$  la réduction de  $\beta$  mod  $\mathfrak{m}^{n+1}$  et  $\mathcal{M}_n = \mathcal{M}/\mathfrak{m}^{n+1} \mathcal{M}$  ; alors

$$\beta^* \beta_*(\mathcal{M})/\mathfrak{m}^{n+1} = \beta_n^* \beta_{n*}(\mathcal{M}_n)$$

et puisque  $\mathcal{M}$  et  $\beta_*(\mathcal{M})$  sont cohérents [théo (1.1) (1)] on a des isomorphismes

$$\mathcal{M} \xrightarrow{\sim} \varprojlim_n \mathcal{M}_n \quad \text{et} \quad \beta^* \beta_*(\mathcal{M}) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_n \beta_n^* \beta_{n*}(\mathcal{M}_n).$$

Or le morphisme canonique

$$\beta_n^* \beta_{n*}(\mathcal{M}_n) \longrightarrow \mathcal{M}_n$$

est un isomorphisme d'après [SGA 4, VIII, 5.7], d'où une nouvelle démonstration de l'isomorphisme canonique

$$\alpha^* \alpha_*(M) \xrightarrow{\sim} M$$

en prenant ci-dessus la limite sur  $n$  et en passant aux fibres génériques. L'égalité  $R^i \alpha_*(M) = 0$  pour  $i > 0$  s'obtient en appliquant [SGA 4, VIII, 5.6].  $\square$

## 2. Sorites sur les voisinages stricts

**2.0.** Rappelons la définition de “voisinage strict” dans un espace rigide analytique [G-K 2, 2.22].

Si  $U$  est un ouvert admissible d'un espace rigide analytique  $W$ , un ouvert admissible  $V \subset W$  est appelé voisinage strict de  $U$  dans  $W$  si  $\{V, W \setminus U\}$  est un recouvrement admissible de  $W$ . Cette définition redonne celle de [B 3, (1.2.1)] dans le cas des tubes.

**2.1.** Considérons un diagramme commutatif

$$(2.1.1) \quad \begin{array}{ccccc} X^\zeta & \xrightarrow{i_\mathcal{X}} & \mathcal{X} & \xrightarrow{\psi} & \mathcal{Y} \\ f \downarrow & & \downarrow h & \square & \downarrow \bar{h} \\ S^\zeta & \xrightarrow{i_\mathcal{S}} & \mathcal{S} & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{T} \end{array}$$

dans lequel le carré de droite est un carré cartésien de  $\mathcal{V}$ -schémas formels séparés plats de type fini,  $f$  est un morphisme de  $k$ -schémas,  $i_\mathcal{X}, i_\mathcal{Y} = \psi \circ i_\mathcal{X}$ ,  $i_\mathcal{S}$  et  $i_\mathcal{T} = \varphi \circ i_\mathcal{S}$  sont des immersions.

On note  $h' : ]X[_\mathcal{X} \longrightarrow ]S[_\mathcal{S}$ ,  $\bar{h}' : ]X[_\mathcal{Y} \longrightarrow ]S[_\mathcal{T}$ ,  $\psi' : ]X[_\mathcal{X} \longrightarrow ]X[_\mathcal{Y}$ ,  $\varphi' : ]S[_\mathcal{S} \longrightarrow ]S[_\mathcal{T}$  les morphismes induits respectivement par  $h, \bar{h}, \psi, \varphi$  [B 3, (1.1.11) (i)].

**Proposition (2.1.2).** *Avec les notations précédentes, on a un diagramme commutatif à carrés cartésiens*

$$\begin{array}{ccc} ]X[_\mathcal{X} & \xrightarrow{\psi'} & ]X[_\mathcal{Y} \\ h' \downarrow & & \downarrow \bar{h}' \\ ]S[_\mathcal{S} & \xrightarrow{\varphi'} & ]S[_\mathcal{T} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{S}_K & \xrightarrow{\varphi_K} & \mathcal{T}_K \end{array} \quad .$$

*Démonstration.* Pour le carré du bas, ça résulte de la définition des tubes et du morphisme de spécialisation. Pour le carré du haut, il s'agit de vérifier que  $]X[_\mathcal{X}$  satisfait la propriété universelle du produit fibré. Soit  $Z$  un espace rigide analytique s'insérant dans un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} Z & \xrightarrow{u} & ]X[_\mathcal{Y}^\zeta & \longrightarrow & \mathcal{Y}_K \\ \downarrow & & \downarrow \bar{h}' & & \downarrow \bar{h}_K \\ ]S[_\mathcal{S} & \xrightarrow{\varphi'} & ]S[_\mathcal{T} & & \\ & \searrow & \searrow & & \\ & \mathcal{S}_K & \xrightarrow{\varphi_K} & \mathcal{T}_K & \end{array} \quad ;$$

par propriété universelle de  $\mathcal{X}_K = \mathcal{S}_K \times_{\mathcal{T}_K} \mathcal{Y}_K$  on en déduit une flèche  $Z \xrightarrow{v} \mathcal{X}_K$  qui s'insère dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
& & X & \xlongequal{\quad} & X \\
& & \downarrow i_{\mathcal{X}} & & \downarrow i_{\mathcal{Y}} \\
& & \mathcal{X} & \xrightarrow{\psi} & \mathcal{Y} \\
& & \uparrow sp & & \uparrow sp \\
Z & \xrightarrow{v} & \mathcal{X}_K & \xrightarrow{\psi_K} & \mathcal{Y}_K \\
& & \uparrow & & \uparrow \\
& & ]X[_{\mathcal{X}} & \xrightarrow{\psi'} & ]X[_{\mathcal{Y}}
\end{array}$$

$u$

où  $sp$  sont les morphismes de spécialisation. Puisque  $sp(]X[_{\mathcal{Y}}) = X \xhookrightarrow{i_{\mathcal{Y}}} \mathcal{Y}$  et compte tenu de la commutativité du diagramme précédent le morphisme  $v$  se factorise par  $]X[_{\mathcal{X}}$  en

$$\begin{array}{ccc}
Z & \xrightarrow{v} & \mathcal{X}_K \\
& \searrow & \uparrow \\
& & ]X[_{\mathcal{X}}
\end{array}
\quad ;$$

d'où la proposition.  $\square$

**2.2.** Considérons à présent un diagramme commutatif

$$(2.2.1) \quad
\begin{array}{ccccccc}
X & \xhookrightarrow{j_{X_1}} & X_1 & \xhookrightarrow{j_Y} & Y & \xhookrightarrow{i_Y} & \mathcal{Y} \\
& \searrow f & \downarrow f_1 & \square & \downarrow \bar{f} & \downarrow \bar{h} & \\
& & S & \xrightarrow{j_T} & T & \xrightarrow{i_T} & \mathcal{T} \xrightarrow{\rho} \mathcal{W}
\end{array}$$

dans lequel le carré de gauche est cartésien  $f$ ,  $f_1$  et  $\bar{f}$  sont des morphismes de  $k$ -schémas,  $\bar{h}$  et  $\rho$  sont des morphismes de  $\mathcal{V}$ -schémas formels séparés plats de type fini,  $j_{X_1}$ ,  $j_Y$  et  $j_T$  sont des immersions ouvertes,  $i_Y$  et  $i_T$  sont des immersions fermées. Notons  $X_2 = \bar{h}^{-1}(S)$ ,  $Y_2 = \bar{h}^{-1}(T)$  et  $f_2 : X_2 \rightarrow S$ ,  $\bar{f}_2 : Y_2 \rightarrow T$  les morphismes induits par  $\bar{h}$ . Soient  $Y_0$  et  $T_0$  les réductions modulo  $\pi$  de  $\mathcal{Y}$  et  $\mathcal{T}$  : les immersions fermées  $i_Y$  et  $i_T$  se factorisent respectivement via les immersions fermées  $i_{2Y_0} : Y \hookrightarrow Y_0$ ,  $i_{Y_0} : Y \hookrightarrow Y_2 \hookrightarrow Y_0$  et  $i_{T_0} : T \hookrightarrow T_0$ . On désigne par  $\bar{h}_X : ]X[_{\mathcal{Y}} \rightarrow ]S[_{\mathcal{T}}$ ,  $\bar{h}_Y : ]Y[_{\mathcal{Y}} \rightarrow ]T[_{\mathcal{T}}$  les morphismes induits par  $\bar{h}_K : \mathcal{Y}_K \rightarrow \mathcal{T}_K$  [B 3, (1.1.11) (i)],  $j'_Y : ]X[_{\mathcal{Y}} \rightarrow ]Y[_{\mathcal{Y}}$ ,  $i'_{Y_0} : ]Y[_{\mathcal{Y}} \rightarrow ]Y_0[_{\mathcal{Y}} = \mathcal{Y}_K$ ,  $i'_{2Y_0} : ]Y_2[_{\mathcal{Y}} \rightarrow \mathcal{Y}_K$  ceux induits par l'identité de  $\mathcal{Y}_K$  et

$j'_T : ]S[_T \longrightarrow ]T[_T$ ,  $i'_{T_0} : ]T[_T \longrightarrow ]T_0[_T = \mathcal{T}_K$  ceux induits par l'identité de  $\mathcal{T}_K$ . Si  $V$  est un voisinage strict de  $]S[_T$  dans  $]T[_T$ , alors  $W := \bar{h}_Y^{-1}(V)$  est un voisinage strict de  $]X_1[_Y$  (donc de  $]X[_Y$ ) dans  $]Y[_Y$  [B 3, (1.2.7)] et on note  $h_V := \bar{h}_{Y|W} : W \rightarrow V$ .

**Proposition (2.2.2).** *Sous les hypothèses (2.2) on a :*

(2.2.2.1) *Supposons que  $\bar{f}^{-1}(S) = X$ , alors le diagramme (2.2.1) induit un diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccccc} ]X[_Y & \xrightarrow{j'_Y} & ]Y[_Y & \xrightarrow{i'_{Y_0}} & \mathcal{Y}_K \\ \bar{h}_X \downarrow & \square & \downarrow \bar{h}_Y & & \downarrow \bar{h}_K \\ ]S[_T & \xrightarrow{j'_T} & ]T[_T & \xrightarrow{i'_{T_0}} & \mathcal{T}_K \end{array},$$

dans lequel le carré de gauche est cartésien et les flèches horizontales sont des immersions ouvertes .

(2.2.2.2) *Supposons que  $\bar{h}^{-1}(T) = Y$  et  $\bar{f}^{-1}(S) = X$ . Alors :*

*Les deux carrés du diagramme précédent sont cartésiens.*

*Si de plus  $V$  décrit un système fondamental de voisinages stricts de  $]S[_T$  dans  $]T[_T$ , alors  $\bar{h}_Y^{-1}(V)$  décrit un système fondamental de voisinages stricts de  $]X[_Y$  dans  $]Y[_Y$ .*

*Démonstration.*

L'existence du diagramme commutatif dans (2.2.2.1) résulte de (2.2.1) et [B 3, (1.1.11) (i)] via la définition des tubes [B 3, (1.1.1)].

Puisque  $\bar{f}^{-1}(S) = X$  le diagramme (2.2.1) se décompose en

$$(2.2.2.3) \quad \begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{j_Y} & Y & \xrightarrow{i_Y} & \mathcal{Y} & & \\ \downarrow & \square & \downarrow & & \parallel & & \\ \bar{h}^{-1}(S) & \longrightarrow & \bar{h}^{-1}(T) & \longrightarrow & \mathcal{Y} & & \\ \downarrow & \square & \downarrow & \square & \downarrow \bar{h} & & \\ S & \xrightarrow{j_T} & T & \xrightarrow{i_T} & \mathcal{T} & \xrightarrow{\rho} & \mathcal{W} \end{array} .$$

On est donc ramené à étudier séparément le cas où  $\bar{h}^{-1}(T) = Y$  et  $\bar{f}^{-1}(S) = X$  et celui où  $\bar{h} = id$  : on montrera d'abord (2.2.2.2) et pour (2.2.2.1) il nous

suffira de traiter le cas où  $h = id$ .

*Pour (2.2.2.2).* Les carrés du diagramme (2.2.2.1) sont cartésiens d'après la définition des tubes [B 3, (1.1.1)] et le fait que  $\bar{h}^{-1}(T) = Y$  et  $\bar{f}^{-1}(S) = X$ .

Pour la deuxième assertion de (2.2.2.2), on va utiliser les voisinages standards  $V_{\eta, \Delta} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_{\eta_n, \lambda_n}$  de Berthelot [B 3, (1.2.4)] : rappelons au passage que si  $\lambda_n < \lambda'_n$  alors  $V_{\eta_n, \lambda'_n} \subset V_{\eta_n, \lambda_n}$ .

Si  $V$  est un voisinage strict de  $]S[_{\mathcal{T}}$  dans  $]T[_{\mathcal{T}}$ , alors  $\bar{h}_Y^{-1}(V)$  est un voisinage strict de  $]X[_{\mathcal{Y}}$  dans  $]Y[_{\mathcal{Y}}$  [B 3, (1.2.7)]. Soit  $W$  un voisinage strict de  $]X[_{\mathcal{Y}}$  dans  $]Y[_{\mathcal{Y}}$ ; d'après [B 3, (1.2.2)] on se ramène au cas où  $]Y[_{\mathcal{Y}}$  est affinoïde, et avec les notations de [loc. cit.] il existe  $\lambda_0 < 1$  tel que, pour  $\lambda_0 \leq \lambda < 1$ , on ait  $U_\lambda \subset W$ . Avec les notations de [B 3, (1.2.4) (i)] si  $V_{\eta, \Delta}(S)$  parcourt un système fondamental de voisinages stricts de  $]S[_{\mathcal{T}}$  dans  $]T[_{\mathcal{T}}$ , alors il existe  $\eta_n$  et  $\lambda_n$  assez proches de 1 tels que  $(\bar{h}_Y)^{-1}(V_{\eta_n, \lambda_n}(S)) \subset U_\lambda$  car les équations locales de  $Y$  (resp de  $Z := Y \setminus X$ ) sont obtenues par image inverse par  $\bar{h}$  des équations locales de  $T$  (resp de  $T \setminus S$ ) (cf. aussi [LS, prop 3.2.8]).

*Pour (2.2.2.1).* Puisque  $]X[_{\mathcal{Y}}$  et  $]Y[_{\mathcal{Y}}$  sont des ouverts de  $\mathcal{Y}_K$  [B 3, (1.1.2)] il en résulte que  $j'_Y$  et  $i'_{Y_0}$  sont des immersions ouvertes; de même pour  $j'_T$  et  $i'_{T_0}$ .

Pour montrer que le carré de gauche du diagramme (2.2.2.1) est cartésien il nous suffit de traiter le cas où  $h = id$ . Comme  $\bar{f}^{-1}(S) = X$ , les équations locales de  $Z = Y \setminus X$  sont obtenues par image inverse par  $\bar{f}$  des équations locales de  $T \setminus S$  : la définition des tubes [B 3, (1.1.1)] fournit alors l'égalité  $]X[_{\mathcal{Y}} = ]S[_{\mathcal{Y}} \cap ]Y[_{\mathcal{Y}}$ , d'où le carré cartésien de (2.2.2.1).  $\square$

**Proposition (2.2.3).** *Sous les hypothèses de (2.2) on a :*

(2.2.3.1) *Supposons  $\bar{h}^{-1}(T) = Y, \bar{f}^{-1}(S) = \bar{h}^{-1}(S) = X$  et  $\bar{h}$  est propre. Alors  $\bar{h}_K, \bar{h}_Y$  et  $\bar{h}_X$  sont propres. Si  $V$  est un voisinage strict de  $]S[_{\mathcal{T}}$  dans  $]T[_{\mathcal{T}}$  et  $W = \bar{h}_Y^{-1}(V)$ , alors  $h_V = \bar{h}_{Y|_W} : W \rightarrow V$  est propre.*

(2.2.3.2) *Supposons  $\bar{h}$  lisse sur un voisinage de  $X$  dans  $\mathcal{Y}$ . Alors*

(i)  *$\bar{h}_X$  est lisse et quel que soit  $V$  un voisinage strict de  $]S[_{\mathcal{T}}$  dans  $]T[_{\mathcal{T}}$  il existe un voisinage strict  $W$  de  $]X[_{\mathcal{Y}}$  dans  $]Y[_{\mathcal{Y}}$  tel que  $\bar{h}_K$  induise un morphisme lisse  $h_V : W \rightarrow V$ . De plus  $h_V(W)$  est un ouvert admissible de  $V$  et de  $\mathcal{T}_K$ , et  $\Omega_{W/V}^i$  est un  $\mathcal{O}_W$ -module cohérent et localement libre.*

(ii) *Si l'on suppose aussi que  $\bar{h}^{-1}(T) = Y$ , et  $\bar{h}^{-1}(S) = X$ , alors il*

existe un voisinage strict  $V$  de  $]S[_{\mathcal{T}}$  dans  $]T[_{\mathcal{T}}$  tel qu'en posant  $W = \bar{h}_Y^{-1}(V)$  le morphisme  $\bar{h}_K$  induise un morphisme lisse  $h_V : W \rightarrow V$

- (iii) Si en outre  $g : \mathcal{T} \rightarrow \mathrm{Spf} \mathcal{V}$  est lisse sur un voisinage de  $S$  dans  $\mathcal{T}$ , alors on peut prendre le  $V$  du (i) lisse sur  $K$  et ainsi  $\Omega_{V/K}^1$  est localement libre de type fini sur le faisceau cohérent d'anneaux  $\mathcal{O}_V$ .
- (iv) Supposons  $f$  surjectif,  $\bar{h}^{-1}(T) = Y$ ,  $\bar{h}^{-1}(S) = X$  et pour  $V$  et  $W$  comme en (ii) posons  $V' = h_V(W)$ .  
Si  $(W_\lambda)_\lambda$  est un système fondamental de voisinages stricts de  $]X[_{\mathcal{Y}}$  dans  $]Y[_{\mathcal{Y}}$  avec  $W_\lambda \subset W$ , alors  $(h_V(W_\lambda))_\lambda$  est un système fondamental de voisinages stricts de  $]S[_{\mathcal{T}}$  dans  $V'$ .
- (v) Sous les hypothèses (iv) supposons  $\bar{h}$  propre. Alors  $h_V$  induit un morphisme propre lisse et surjectif

$$h_{V'} : W \longrightarrow V'.$$

*Démonstration.*

*Prouvons (2.2.3.1).* Sous nos hypothèses les deux carrés de (2.2.2.1) sont cartésiens [cf (2.2.2.2)]. D'après Lütkebohmert [Lü, theo 3.1] le morphisme propre  $\bar{h}$  induit un morphisme propre d'espaces analytiques rigides  $\bar{h}_K : \mathcal{Y}_K \rightarrow \mathcal{T}_K$ . Comme la notion de morphisme propre est stable par changement de base en géométrie rigide [B-G-R, fin de 9.6.2, p 396], on en déduit que  $\bar{h}_Y, \bar{h}_X$  et  $h_V$  sont propres.

*Pour (2.2.3.2).*

- (i) L'ensemble  $W'$  des points de  $]Y[_{\mathcal{Y}}$  où le morphisme  $\bar{h}_K$  est lisse est un voisinage strict de  $]X[_{\mathcal{Y}}$  dans  $]Y[_{\mathcal{Y}}$  [B 3, (2.2.1)]. Si  $V$  est un voisinage strict quelconque de  $]S[_{\mathcal{T}}$  dans  $]T[_{\mathcal{T}}$ ,  $W = \bar{h}_Y^{-1}(V) \cap W'$  est un voisinage strict de  $]X[_{\mathcal{Y}}$  dans  $]Y[_{\mathcal{Y}}$  [B 3, (1.2.7) et (1.2.10)] et  $\bar{h}_K$  induit donc un morphisme lisse  $h_V : W \rightarrow V$ ; en particulier  $\bar{h}_X : ]X[_{\mathcal{Y}} \rightarrow ]S[_{\mathcal{T}} \subset V$  est lisse.

Puisque  $h_V$  est plat il est ouvert pour la topologie rigide [Bo-Lü 2, 5.11], donc  $h_V(W)$  est un ouvert admissible de  $V$ , donc de  $\mathcal{T}_K$  car  $V$  est un ouvert admissible de  $\mathcal{T}_K$ . La lissité de  $h_V$  prouve que  $\Omega_{W/V}^i$  est un  $\mathcal{O}_W$ -module localement libre de type fini, et comme  $\mathcal{O}_W$  est un faisceau cohérent d'anneaux [prop (1.3)], il résulte de [EGA  $\mathcal{O}_I$ , (5.4.1)] que  $\Omega_{W/V}^i$  est un  $\mathcal{O}_W$ -module cohérent.



- (ii) Si  $V$  décrit un système fondamental de voisinages stricts de  $]S[_{\mathcal{T}}$  dans  $]T[_{\mathcal{T}}$ , alors  $\bar{h}_V^{-1}(V)$  décrit un système fondamental de voisinages stricts de  $]X[_{\mathcal{Y}}$  dans  $]Y[_{\mathcal{Y}}$  [(2.2.2.2)] : ainsi (ii) résulte de (i).
- (iii) Supposons en outre  $g : \mathcal{T} \rightarrow Spf\mathcal{V}$  lisse sur un voisinage de  $S$  dans  $\mathcal{T}$  ; alors l'ensemble des points de  $]T[_{\mathcal{T}}$  où  $g_K$  est lisse est un voisinage strict de  $]S[_{\mathcal{T}}$  dans  $]T[_{\mathcal{T}}$  [B 3, (2.2.1)] : quitte à restreindre le  $V$  du (i) [B 3, (1.2.10)] on peut supposer que la restriction de  $g_K$  à  $V$  est lisse. Ainsi  $\Omega_{V/K}^1$  sera un  $\mathcal{O}_V$ -module localement libre de type fini, donc cohérent sur  $\mathcal{O}_V$  [(1.3)]. D'où (iii).

(iv) et (v) Puisque  $f$  est surjectif et  $\bar{h}$  plat au voisinage de  $X$ , le morphisme

$$\bar{h}_X : ]X[_{\mathcal{Y}} \longrightarrow ]S[_{\mathcal{T}}$$

induit par  $\bar{h}$  est surjectif [B 3, (1.1.12)] et lisse puisque c'est aussi la restriction de  $h_V$ . On a vu en (i) que  $V' = h_V(W)$  est un ouvert admissible de  $V$  et  $h_V(W)$  contient  $]S[_{\mathcal{T}}$  par la surjectivité de  $\bar{h}_X$ . Dans le diagramme commutatif

$$(2.2.3.2.1) \quad \begin{array}{ccccc} ]X[_{\mathcal{Y}} & \hookrightarrow & W = h_V^{-1}(V') = h_V^{-1}(V) & \stackrel{=}{=} & W \\ \bar{h}_X \downarrow & & \downarrow h_{V'} & & \downarrow h_V \\ ]S[_{\mathcal{T}} & \hookrightarrow & V' := h_V(W) & \hookrightarrow & V \end{array}$$

les carrés sont cartésiens d'après (2.2.2.2) et  $h_{V'}$ ,  $\bar{h}_X$  sont lisses et surjectifs.

Soit  $W_\lambda$  un voisinage strict de  $]X[_{\mathcal{Y}}$  dans  $]Y[_{\mathcal{Y}}$  avec  $W_\lambda \subset W$ , où  $W$  est défini ci-dessus : le morphisme plat  $h_V$  envoie le recouvrement admissible  $\{W_\lambda, W \setminus ]X[_{\mathcal{Y}}\}$  de  $W$  sur le recouvrement admissible  $\{h_V(W_\lambda), h_V(W \setminus ]X[_{\mathcal{Y}})\}$  de  $V' = h_V(W)$ . Par la surjectivité de  $h_{V'}$  et le fait que  $h_V^{-1}(]S[_{\mathcal{T}}) = ]X[_{\mathcal{Y}}$  on a  $h_V(W) \setminus ]X[_{\mathcal{Y}} = V' \setminus ]S[_{\mathcal{T}}$  ; par suite  $\{h_V(W_\lambda), V' \setminus ]S[_{\mathcal{T}}\}$  est un recouvrement admissible de  $V'$ , i.e.  $h_V(W_\lambda)$  est un voisinage strict de  $]S[_{\mathcal{T}}$  dans  $V'$ .

Supposons maintenant que  $(W_\lambda)_\lambda$  décrive un système fondamental de voisinages stricts de  $]X[_{\mathcal{Y}}$  dans  $]Y[_{\mathcal{Y}}$  avec  $W_\lambda \subset W$ . Soit  $V''$  un voisinage strict de  $]S[_{\mathcal{T}}$  dans  $V'$  : montrons que  $h_{V'}^{-1}(V'')$  est un voisinage

strict de  $]X[_Y$  dans  $W$ . D'abord  $\{V''; V' \setminus ]S[_T\}$  est un recouvrement admissible de  $V'$ , donc par image inverse  $\{h_{V'}^{-1}(V''); h_{V'}^{-1}(V' \setminus ]S[_T)\}$  est un recouvrement admissible de  $h_{V'}^{-1}(V') = W$ ; en utilisant encore l'égalité  $h_{V'}^{-1}(]S[_T) = ]X[_Y$  on en déduit que  $h_{V'}^{-1}(V' \setminus ]S[_T) = W \setminus ]X[_Y$  : donc  $h_{V'}^{-1}(V'')$  est un voisinage strict de  $]X[_Y$  dans  $W$ . Ainsi il existe  $\mu$  tel que  $W_\mu \subset h_{V'}^{-1}(V'')$ , d'où

$$h_{V'}(W_\mu) \subset h_{V'} h_{V'}^{-1}(V'') = V'';$$

par suite  $(h_V(W_\lambda))_\lambda$  est bien un système fondamental de voisinages stricts de  $]S[_T$  dans  $V'$ .

Si de plus  $\bar{h}$  est propre alors  $h_{V'}$  est de surcroît propre puisque (2.2.3.2.1) est à carrés cartésiens et  $h_V$  est propre.  $\square$

**2.3.** Soient  $S = \text{Spec } A_0$  un  $k$ -schéma lisse et  $f : X = \text{Spec } B_0 \rightarrow S$  un  $k$ -morphisme fini. Désignons par  $A = \mathcal{V}[t_1, \dots, t_n]/(f_1, \dots, f_r)$  une  $\mathcal{V}$ -algèbre lisse relevant  $A_0$ ,  $\mathcal{S} = \text{Spf } \hat{A}$ ,  $\tilde{\mathcal{S}} = \hat{P}$  et  $\overline{\mathcal{S}} = \widehat{P'}$  comme dans le théorème (3.4) du I : on sait [loc. cit.] que  $\tilde{\mathcal{S}}$  et  $\overline{\mathcal{S}}$  sont propres sur  $\mathcal{V}$ , que  $\overline{\mathcal{S}}$  est normal, qu'il existe une  $A$ -algèbre finie  $B$  et un carré cartésien de  $\mathcal{V}$ -schémas formels

$$\begin{array}{ccc} \text{Spf } \hat{B} = \mathcal{X} & \xrightarrow{\quad} & \overline{\mathcal{X}} = \widehat{P''}_1 \\ h \downarrow & & \downarrow \bar{h} \\ \text{Spf } \hat{A} = \mathcal{S} & \xrightarrow{j} & \overline{\mathcal{S}} = \widehat{P'} \end{array}$$

où  $P''_1$  est la fermeture intégrale de  $P'$  dans  $\text{Spec } B$ , avec  $h$  fini,  $\bar{h}$  fini et  $j$  une immersion ouverte. On note  $\bar{f} : \overline{\mathcal{X}} \rightarrow \overline{\mathcal{S}}$  la réduction de  $\bar{h} : \overline{\mathcal{X}} \rightarrow \overline{\mathcal{S}}$  sur  $k = \mathcal{V}/\mathfrak{m}$ .

Rappelons [I, théo 3.4] qu'il existe  $a \in A$  et  $f(t) \in A_a[t]$  tels que  $B$  est la fermeture intégrale de  $A$  dans  $A_a[t]/(f)$ . Fixons d'autre part une présentation de la  $\mathcal{V}$ -algèbre  $B$

$$B \simeq \mathcal{V}[t'_1, \dots, t'_{n'}]/(g_1, \dots, g_s).$$

Soient  $\overline{\mathcal{Y}}$  le complété formel de la fermeture projective  $P''_2$  de  $\text{Spec } B$  dans  $\mathbb{P}_{\mathcal{V}}^{n'}$  et  $\overline{\mathcal{Y}}$  sa réduction sur  $k$ .

Comme  $P'$  est le normalisé de  $P$  on a un triangle commutatif

$$\begin{array}{ccc}
& & \overline{\mathcal{S}} := \hat{P}' \\
& \nearrow j & \downarrow v \\
\mathcal{S} & \xrightarrow{\tilde{j}} & \tilde{\mathcal{S}} := \hat{P}
\end{array}$$

où  $v$  est fini et  $\tilde{j}$  une immersion ouverte. Un système fondamental de voisinages stricts de  $\mathcal{S}_X$  dans  $\tilde{\mathcal{S}}_K$  est fourni par les intersections  $\tilde{V}_\lambda$  de  $(\operatorname{Spec} A)_K^{an}$  avec les boules  $B(0, \lambda^\dagger) \subset \mathbb{A}_K^n$  pour  $\lambda \rightarrow 1^+$  et  $\tilde{V}_\lambda = \operatorname{Spm} A_\lambda$ ,  $A_K^\dagger = \varinjlim_\lambda A_\lambda$  [B 3, (2.5.1)]. Puisque  $v$  est propre, et étale au voisinage de  $\mathcal{S}$ , il existe  $\lambda_0 > 1$  tel que tout  $\lambda$ ,  $1 < \lambda \leq \lambda_0$ ,  $v$  induise un isomorphisme entre  $\tilde{V}_\lambda$  et un voisinage strict  $V_\lambda$  de  $\mathcal{S}_K$  dans  $\tilde{\mathcal{S}}_K$  [B 3, (1.3.5)] : on identifiera  $V_\lambda$  et  $\tilde{V}_\lambda$  dans la suite.

Notons  $P_3''$  l'adhérence schématique de  $\operatorname{Spec} B$  plongé diagonalement dans  $P_1'' \times_{\mathcal{V}} P_2''$ ,  $\overline{\mathcal{Z}} = \widehat{P_3''}$  le complété formel de  $P_3''$  et  $\overline{\mathcal{Z}}$  sa réduction mod  $\mathfrak{m}$ . On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
& & \overline{\mathcal{Y}} & \hookrightarrow & \overline{\mathcal{Y}} \\
& \nearrow & \uparrow v_2 & & \uparrow u_2 \\
X & \hookrightarrow & \overline{\mathcal{Z}} & \hookrightarrow & \overline{\mathcal{Z}} \\
& \searrow & \downarrow v_1 & & \downarrow u_1 \\
& & \overline{\mathcal{X}} & \hookrightarrow & \overline{\mathcal{X}}
\end{array}$$

où les  $u_i, v_i$  sont propres et les  $u_i$  sont étales au voisinage de  $X$ . D'après [B 3, (1.3.5)]  $u_{1K}$  induit un isomorphisme entre un voisinage strict de  $]X[_{\overline{\mathcal{Z}}}$  dans  $\overline{\mathcal{Z}}_K$  et un voisinage strict de  $]X[_{\overline{\mathcal{X}}} \simeq ]X[_{\mathcal{X}} = \mathcal{X}_K$  dans  $\overline{\mathcal{X}}_K$  et par suite un isomorphisme entre des systèmes fondamentaux de tels voisinages stricts. De même  $u_{2K}$  induit un isomorphisme entre un système fondamental de voisinages stricts de  $]X[_{\overline{\mathcal{Z}}}$  dans  $\overline{\mathcal{Z}}_K$  et un système fondamental  $(W'_{\lambda'})_{\lambda'} = (\operatorname{Spm} B_{\lambda'})_{\lambda'}$  de voisinages stricts de  $\mathcal{X}_K$  dans  $\overline{\mathcal{Y}}_K$ . Par composition il en résulte pour  $\lambda' \rightarrow 1^+$  un isomorphisme entre les  $W'_{\lambda'} = \operatorname{Spm} B_{\lambda'}$  et un système fondamental de voisinages stricts  $(W''_{\lambda''})$  de  $\mathcal{X}_K$  dans  $\overline{\mathcal{X}}_K$  identifiés ci-après. Pour  $\lambda > 1$ , il existe donc  $\lambda' > 1$  et des immersions ouvertes

$$\operatorname{Spm} \hat{B}_K = \mathcal{X}_K \hookrightarrow \operatorname{Spm} B_{\lambda'} \xrightarrow{j'_{\lambda\lambda'}} \overline{h_K^{-1}}(V_\lambda) =: W_\lambda.$$

**Proposition (2.3.1).** *Avec les notations de (2.3) on a :*

- (1) *Si  $(V_\lambda)_\lambda$  est un système fondamental de voisinages stricts de  $\mathcal{S}_K$  dans  $\overline{\mathcal{S}}_K$ , alors  $(W_\lambda)_\lambda := (\overline{h}_K^{-1}(V_\lambda))_\lambda$  est un système fondamental de voisinages stricts de  $\mathcal{X}_K$  dans  $\overline{\mathcal{X}}_K$ .*
- (2) *Supposons de plus  $f$  fini et plat (resp. fini et fidèlement plat, resp. fini étale, resp. fini étale galoisien de groupe  $G$ ) et  $V_\lambda = \text{Spm } A_\lambda$ . Alors il existe  $\lambda_0 > 1$  tel que pour tout  $\lambda, 1 < \lambda \leq \lambda_0$ , et  $W_\lambda := \overline{h}_K^{-1}(V_\lambda)$ , le morphisme induit par  $\overline{h}_K$*

$$h_\lambda := \overline{h}_{K|W_\lambda} : W_\lambda \longrightarrow V_\lambda$$

*soit fini et plat (resp. fini et fidèlement plat, resp. fini étale, resp. fini étale galoisien de groupe  $G$ ), avec  $V_\lambda$  lisse sur  $K$  et  $\Omega_{V_\lambda/K}^1$  localement libre de type fini sur le faisceau cohérent d'anneaux  $\mathcal{O}_{V_\lambda}$ .*

*Démonstration.* On utilise les notations du (2.3).

- (1) On a déjà prouvé le (1) dans la proposition (2.1.2) : on en donne ici une autre démonstration. Il suffit de faire la démonstration dans le cas  $V_\lambda = \text{Spm } A_\lambda$  et on peut supposer  $A, B, P'$  et  $P''$  intégralement clos. Notons  $W_\lambda = \overline{h}_K^{-1}(V_\lambda)$  et  $h_\lambda := \overline{h}_{K|W_\lambda} : W_\lambda \rightarrow V_\lambda$ . Comme  $P_1'$  est intègre les immersions ouvertes

$$\mathcal{X}_K \hookrightarrow W_\lambda \hookrightarrow \overline{\mathcal{X}}_K$$

sont dominantes.

On a vu à la fin de la preuve du (1) de la proposition (2.2.1) que pour  $\lambda$  assez proche de 1,  $V_\lambda$  est lisse sur  $K$  et  $\Omega_{V_\lambda/K}^1$  localement libre de type fini sur l'anneau cohérent  $\mathcal{O}_{V_\lambda}$ , d'où la fin du (2).

Comme  $B_{\lambda'}$  est formé d'éléments entiers sur  $A_K^\dagger$ , il existe  $\mu, 1 < \mu \leq \lambda$ , tel que  $B_{\lambda'}$  soit fini sur  $A_\mu$ . Par suite on a un diagramme commutatif à carré cartésien

$$\begin{array}{ccccc}
 W'_{\lambda'} = \text{Spm } B_{\lambda'} & & & & \\
 \swarrow \scriptstyle j'_{\mu\lambda'} & \searrow \scriptstyle j'_{\lambda\lambda'} & & & \\
 & W_\mu & \xrightarrow{\alpha'_{\lambda\mu}} & W_\lambda & \\
 \downarrow \scriptstyle h_\mu & & & \downarrow \scriptstyle h_\lambda & \\
 V_\mu = \text{Spm } A_\mu & \xrightarrow{\alpha_{\lambda\mu}} & V_\lambda = \text{Spm } A_\lambda & & 
 \end{array}$$

$\swarrow \scriptstyle h'$

avec une factorisation  $j'_{\lambda\lambda'} = \alpha'_{\lambda\mu} \circ j'_{\mu\lambda'}$  et  $h'$  fini : les immersions ouvertes  $j'_{\lambda\lambda'}$  et  $\alpha'_{\lambda\mu}$  admettent des modèles formels qui sont des immersions ouvertes entre schémas formels noethériens [Bo-Lü 2, cor 5.10] ; en passant par un modèle formel de  $j'_{\mu\lambda'}$ , il en résulte que  $j'_{\mu\lambda'}$  est aussi une immersion ouverte et  $j'_{\mu\lambda'}$  est dominante car  $j'_{\lambda\lambda'}$  et  $\alpha'_{\lambda\mu}$  le sont. D'autre part il existe des modèles formels propres de  $h'$  et  $h_\mu$  [Lü, 2.6] : par suite  $j'_{\mu\lambda'}$  est propre ; or  $j'_{\mu\lambda'}$  est une immersion ouverte dominante, donc  $j'_{\mu\lambda'}$  est un isomorphisme.

D'où le (1).

- (2) Là encore on peut supposer  $A$  et  $B$  intégralement clos : on traitera à part le cas fini étale galoisien.

Notons  $\varphi : A \rightarrow B$  le morphisme fini tel que  $\text{Spec } \varphi : \text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$  relève  $f$  [I, théo 3.4], et  $\hat{\varphi} : \hat{A} \rightarrow \hat{B}$  (resp.  $\varphi^\dagger : A^\dagger \rightarrow B^\dagger$ ) le morphisme induit sur les séparés complétés (resp. sur les complétés faibles). D'après le [I, théo 3.4],  $\varphi^\dagger$  et  $\hat{\varphi}$  sont finis et plats (resp. finis et fidèlement plats, resp. finis étales) si et seulement si  $f$  l'est. Avec les notations du (2.3) on a :

$$A_K^\dagger = \varinjlim_{\lambda \rightarrow 1} A_\lambda, B_K^\dagger = \varinjlim_{\lambda \rightarrow 1} B_\lambda \text{ et } \varphi_K^\dagger : A_K^\dagger \rightarrow B_K^\dagger$$

est la limite inductive des  $\varphi_\lambda : A_\lambda \rightarrow B_\lambda$  avec

$$h_\lambda = \text{Spm } (\varphi_\lambda) : W_\lambda = \text{Spm } B_\lambda \rightarrow V_\lambda = \text{Spm } A_\lambda.$$

Si  $f$  est fini et plat (resp. ...) alors  $\varphi_K^\dagger$  l'est et pour  $\lambda$  assez proche de 1,  $\varphi_\lambda$  l'est aussi par [EGA IV, 11.2.6, 8.10.5, 17.7.8], de même pour  $h_\lambda$ . D'où le (2) hormis la cas galoisien.

Considérons à présent le cas galoisien.

Puisque  $f$  est galoisien il est surjectif ; ainsi

$$h : \mathcal{X} = \text{Spf } \hat{B} \rightarrow \mathcal{S} = \text{Spf } \hat{A}$$

est fini étale surjectif et galoisien de groupe  $G$ , d'où en particulier une injection :  $\hat{A} \hookrightarrow \hat{B}$ . Par suite  $h_K : \mathcal{X}_K \rightarrow \mathcal{S}_K$  est fini étale surjectif et galoisien de groupe  $G$ .

Remarquons ensuite que puisque  $B$  est la fermeture intégrale de  $A$  dans  $A_a[t]/(f)$  et que  $\text{Spec } A \rightarrow \text{Spec } A^\dagger$  est un morphisme normal [I, prop (1.1)], il résulte de [EGA IV, (6.14.4)] que  $B^\dagger = B \otimes_A A^\dagger$  est la fermeture intégrale de  $A^\dagger$  dans  $(B^\dagger)_a = (A^\dagger)_a[t]/(f)$  : par suite  $B_K^\dagger$  est la fermeture intégrale de  $A_K^\dagger$  dans  $(A^\dagger)_{a,K}[t]/(f)$ . L'anneau  $A^\dagger$  est réduit par [I, prop (1.6)], car  $A$  est réduit, et  $A^\dagger \rightarrow B^\dagger$  est fini étale car  $\hat{A} \rightarrow \hat{B}$  l'est : donc  $B^\dagger$  est réduit car  $A^\dagger$  est réduit [I, lemme (1.5)]. Ainsi  $B^\dagger$  est intégralement fermé dans  $\hat{B}$  [I, théo (2.2) (2) ii] ; d'où  $B_K^\dagger$  est la fermeture intégrale de  $A_K^\dagger$  dans  $\hat{B}_K$ .

On a vu ci-dessus que, pour  $\lambda$  suffisamment proche de 1,

$$h_\lambda : W_\lambda = \text{Spm } B_\lambda \rightarrow V_\lambda = \text{Spm } A_\lambda$$

est fini étale. Compte tenu du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \hat{B}_K & \xleftarrow{\quad} & B_\lambda \\ \uparrow & & \uparrow \\ \hat{A}_K & \xleftarrow{\quad} A_K^\dagger \xleftarrow{\quad} & A_\lambda \end{array}$$

la flèche  $A_\lambda \rightarrow B_\lambda$  induite par  $h_\lambda$  est injective, donc  $h_\lambda$  est surjectif. Choisissons un ensemble fini  $\{x_i\}$  de générateurs de  $B_\lambda$  sur  $A_\lambda$ . Comme chaque  $x_i$  est entier sur  $A_\lambda$ , les éléments  $g_{\hat{B}_K}(x_i) \in \hat{B}_K$ , pour  $g$  décrivant  $G$  et  $g_{\hat{B}_K} : \hat{B}_K \rightarrow \hat{B}_K$  induit par  $g$ , sont aussi entiers sur  $A_\lambda \subset A_K^\dagger$ , donc a fortiori sur  $B_K^\dagger = \varinjlim_{\mu} B_\mu$ . Or on a vu que  $B_K^\dagger$  est intégralement

fermé dans  $\hat{B}_K$  : il existe donc  $\lambda'$ ,  $1 < \lambda' \leq \lambda$  tel que pour tout  $i$  et tout  $g \in G$  on ait  $g_{\hat{B}_K}(x_i) \in B_{\lambda'}$ . Ainsi l'action de  $G$  s'étend de  $\mathcal{X}_K$  à  $W_{\lambda'} = \text{Spm } B_{\lambda'}$  : en effet  $g \in G$  définit un morphisme  $g_{\lambda\lambda'} : W_{\lambda'} \rightarrow W_\lambda$  s'insérant dans le diagramme commutatif à carré cartésien

$$\begin{array}{ccccc} W_{\lambda'} & & & & \\ & \searrow^{g_{\lambda\lambda'}} & & & \\ & & W_{\lambda'} \hookrightarrow & W_\lambda & \\ & \searrow^{h_{\lambda'}} & \downarrow h_{\lambda'} & \downarrow h_\lambda & \\ & & V_{\lambda'} \hookrightarrow & V_\lambda & \\ & & \alpha_{\lambda\lambda'} & & \end{array}$$

d'où la factorisation de  $g_{\lambda\lambda'}$  par  $W_{\lambda'}$ .

Montrons que le morphisme fini étale surjectif

$$h_{\lambda'} : W_{\lambda'} \rightarrow V_{\lambda'}$$

est galoisien de groupe  $G$ . On a

$$(B_{\lambda'})^G \subset (\hat{B}_K)^G = \hat{A}_K;$$

d'où

$$A_{\lambda'} \subset (B_{\lambda'})^G \subset B_{\lambda'} \cap \hat{A}_K$$

et on dispose d'un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} A_{\lambda'} & \hookrightarrow & \hat{A}_K \\ \downarrow & & \downarrow \\ B_{\lambda'} & \hookrightarrow & \hat{B}_K \end{array}$$

avec  $A_{\lambda'} \rightarrow B_{\lambda'}$  fidèlement plat et  $\hat{B}_K = \hat{A}_K \otimes_{A_{\lambda'}} B_{\lambda'}$  : d'après [Et 5 prop 2] on en déduit

$$A_{\lambda'} = B_{\lambda'} \cap \hat{A}_K = (B_{\lambda'})^G,$$

d'où la proposition (2.3.1).  $\square$

### 3. Images directes d'isocristaux

#### 3.1 Sections surconvergentes

On suppose donné un diagramme commutatif tel que (2.2.1). Pour un voisinage strict  $W$  (resp. un couple de voisinages stricts  $W' \subset W$ ) de  $]X[_Y$  dans  $]Y[_Y$  on note  $\alpha_W$  (resp.  $\alpha_{WW'}$ ) l'immersion ouverte de  $W$  dans  $]Y[_Y$  (resp. de  $W'$  dans  $W$ ). Si  $\mathcal{A}$  est un faisceau d'anneaux sur  $W$  et  $E$  un  $\mathcal{A}$ -module, on pose [B 3,(2.1.1.1)] :

$$(3.1.1) \quad j_W^\dagger E := \varinjlim_{W' \subset W} \alpha_{WW'}^* \alpha_{WW'}^* E ,$$

la limite étant prise sur les voisinages  $W' \subset W$ .

De même [B 3,(2.1.1.3)] :

$$(3.1.2) \quad j_Y^\dagger E := \alpha_{W*} j_W^\dagger E .$$

(3.1.3) Si  $V$  est un voisinage strict de  $]S[_\mathcal{T}$  dans  $]T[_\mathcal{T}$ , alors  $W = \bar{h}_K^{-1}(V) \cap ]Y[_\mathcal{Y} = \bar{h}_Y^{-1}(V)$  est un voisinage strict de  $]X[_\mathcal{Y}$  dans  $]Y[_\mathcal{Y}$  [B 3, (1.2.7)] et on note  $h_V$  la restriction de  $\bar{h}_Y$  à  $W$ , et  $R^i \bar{h}_{K*} j_Y^\dagger E := R^i \bar{h}_{Y*} j_Y^\dagger E$ .

**Proposition (3.1.4).** *Avec les hypothèses et notations de (3.1.3) supposons que  $\bar{h}_Y : ]Y[_\mathcal{Y} \longrightarrow ]T[_\mathcal{T}$  soit quasi-compact et quasi-séparé; soit  $E$  un faisceau abélien sur  $W$ .*

(a) *Supposons que  $\bar{h}^{-1}(T) = Y$  et  $\bar{h}^{-1}(S) = X$ ; alors, pour tout entier  $i \geq 0$ , on a des isomorphismes canoniques*

$$(3.1.4.1) \quad R^i h_{V*}(j_W^\dagger E) \xrightarrow{\sim} j_V^\dagger R^i h_{V*}(E).$$

$$(3.1.4.2) \quad R^i \bar{h}_{K*}(j_Y^\dagger E) \xrightarrow{\sim} j_T^\dagger R^i h_{V*}(E).$$

*Si de plus  $\bar{h}$  est une immersion fermée, alors*

$$(3.1.4.3) \quad R^i h_{V*}(j_W^\dagger E) = 0 \text{ pour } i \geq 1$$

*et le morphisme canonique*

$$(3.1.4.4) \quad \bar{h}_K^* \bar{h}_{K*} j_Y^\dagger E \xrightarrow{\sim} j_Y^\dagger E$$

*est un isomorphisme.*

(b) *Si l'on ne suppose plus que  $\bar{h}^{-1}(T) = Y$  et  $\bar{h}^{-1}(S) = X$ , alors, pour tout entier  $i \geq 0$ , on a des isomorphismes canoniques*

$$(3.1.4.5) \quad R^i h_{V*}(j_W^\dagger E) \xrightarrow{\sim} j_V^\dagger R^i h_{V*}(j_W^\dagger E).$$

$$(3.1.4.6) \quad R^i \bar{h}_{K*}(j_Y^\dagger E) \xrightarrow{\sim} j_T^\dagger R^i h_{V*}(j_W^\dagger E).$$

*Démonstration*

(a) Les deux foncteurs

$$\mathcal{F} : E \longmapsto h_{V*} j_W^\dagger E$$

et

$$\mathcal{G} : E \longmapsto j_V^\dagger h_{V*} E$$

de la catégorie  $\mathcal{C}$  des faisceaux abéliens sur  $W$  dans la catégorie des faisceaux abéliens sur  $V$  sont exacts à gauche [B 3, (1.1.3)(iii)]. Comme



la catégorie abélienne  $C$  admet suffisamment d'injectifs, les foncteurs dérivés droits  $R^i\mathcal{F}$  et  $R^i\mathcal{G}$  existent et  $(R^i\mathcal{F})_i$ ,  $(R^i\mathcal{G})_i$  sont des  $\delta$ -foncteurs universels : puisque  $j_W^\dagger$  et  $j_V^\dagger$  sont exacts [loc. cit.], et que  $\alpha_W : W \hookrightarrow ]Y[_Y$  (resp.  $\alpha_V : V \hookrightarrow ]T[_T$ ) est exact sur la catégorie des  $j_W^\dagger\mathbb{Z}$ -modules (resp. des  $j_V^\dagger\mathbb{Z}$ -modules) [B 3, dém. de (2.1.3)], on est ramené pour le (a) à prouver que  $\mathcal{F} = \mathcal{G}$ .

Comme  $\bar{h}_Y$  est quasi-compact et quasi-séparé, il en est de même par changement de base pour  $h_V$ , donc  $h_{V*}$  commute aux limites inductives filtrantes : de plus les hypothèses entraînent que si  $V'$  décrit un système fondamental de voisinages stricts de  $]S[_T$  dans  $]T[_T$ , alors  $h_V^{-1}(V') = W'$  décrit un système fondamental de voisinages stricts de  $]X[_Y$  dans  $]Y[_Y$  [(2.2.2.2)] ; d'où

$$\begin{aligned} h_{V*}(j_W^\dagger E) &= \varinjlim_{w' \subset w} h_{V*}\alpha_{WW'}\alpha_{WW'}^{-1}E \\ &= \varinjlim_{v' \subset v} \alpha_{VV'}h_{V'}\alpha_{VV'}^{-1}E \\ &= \varinjlim_{v' \subset v} \alpha_{VV'}\alpha_{V'}^{-1}h_{V'}E \\ &= j_V^\dagger h_{V*}(E), \end{aligned}$$

ce qui prouve (3.1.4.1) et (3.1.4.2).

Si  $\bar{h}$  est une immersion fermée, alors  $\bar{h}_K$  en est une aussi [B 3, (0.2.4)(iv)], de même que  $h_V$  par changement de base : en particulier  $h_V$  est quasi-compact et quasi-séparé. Ainsi (3.1.4.3) résulte de (3.1.4.2) et (1.3.3). Pour (3.1.4.4) on utilise la suite d'isomorphismes

$$\begin{aligned} \bar{h}_K^* \bar{h}_{K*} j_Y^\dagger E &\xrightarrow{\sim} \bar{h}_K^* j_T^\dagger h_{V*} E & (3.1.4.2) \\ &\xleftarrow{\sim} j_Y^\dagger h_V^* h_{V*}(E) & [B3, (2.1.4.8)] \\ &\xrightarrow{\sim} j_Y^\dagger(E) & (1.3.3). \end{aligned}$$

- (b) L'ouvert  $W = \bar{h}_Y^{-1}(V)$  est un voisinage strict de  $]X[_Y$  (donc de  $]X[_Y$ ) dans  $]Y[_Y$  ; la définition de  $j_W^\dagger(E)$  fait intervenir une limite inductive sur les voisinages stricts  $W'$  de  $]X[_Y$  dans  $]Y[_Y$  : si cette fois la limite inductive est prise sur les voisinages stricts  $W'_1$  de  $]X[_Y$  dans  $]Y[_Y$  nous noterons  $j_{W_1}^\dagger(E)$  le résultat, et on a [B 3, (2.1.7)]

$$j_W^\dagger(E) = j_W^\dagger \circ j_{W_1}^\dagger(E) = j_{W_1}^\dagger \circ j_W^\dagger(E).$$

D'où , en appliquant (3.1.4.1) :

$$\begin{aligned} R^i h_{V*}(j_W^\dagger E) &= R^i h_{V*} j_{W_1}^\dagger (j_W^\dagger E) \\ &= j_V^\dagger R^i h_{V*}(j_W^\dagger E); \end{aligned}$$

de même pour (3.1.4.6).  $\square$

### 3.2 Définition des images directes

(3.2.1) On suppose fixé un diagramme commutatif tel que (2.2.1) et on fait l'hypothèse supplémentaire que  $\bar{h}$  (resp  $\rho$ ) est lisse sur un voisinage de  $X$  dans  $\mathcal{Y}$  (resp de  $S$  dans  $\mathcal{T}$ )

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{j_Y} & Y & \xrightarrow{i_Y} & \mathcal{Y} \\ f \downarrow & & \downarrow \bar{f} & & \downarrow \bar{h} \\ S & \xrightarrow{j_T} & T & \xrightarrow{i_T} & \mathcal{T} \xrightarrow{\rho} \mathcal{W}. \end{array}$$

Soient  $E \in Isoc^\dagger((X, Y)/\mathcal{W})$ ,  $W$  un voisinage strict de  $]X[_{\mathcal{Y}}$  dans  $]Y[_{\mathcal{Y}}$  et  $E_W$  un  $\mathcal{O}_W$ -module cohérent tel que  $j_Y^\dagger E_W =: E_{\mathcal{Y}}$  soit une réalisation de  $E$  [B 3, (2.3.2)] ; on notera  $Isoc^\dagger((X, Y)/\mathcal{W})_{plat}$  la sous-catégorie pleine de  $Isoc^\dagger((X, Y)/\mathcal{W})$  formée des  $E$  tels qu'il existe un  $E_W$  qui soit un  $\mathcal{O}_W$ -module cohérent et plat : lorsque  $\mathcal{W} = Spf\mathcal{V}$  cette condition est automatiquement vérifiée, i.e. on a [B 3, (2.2.3)(ii)] :  $Isoc^\dagger((X, Y)/Spf\mathcal{V})_{plat} = Isoc^\dagger((X, Y)/Spf\mathcal{V}) =: Isoc^\dagger((X, Y)/K)$ . Lorsque  $Y$  est propre sur  $\mathcal{W}$  on notera  $Isoc^\dagger((X, Y)/\mathcal{W})_{plat} = Isoc^\dagger(X/\mathcal{W})_{plat}$  [B 3, (2.3.6)] : si de plus  $\mathcal{W} = Spf\mathcal{V}$  on a  $Isoc^\dagger(X/Spf\mathcal{V})_{plat} = Isoc^\dagger(X/Spf\mathcal{V}) =: Isoc^\dagger(X/K)$ .

Pour  $E \in Isoc^\dagger((X, Y)/\mathcal{W})$  Berthelot a défini dans [B 5, (3.1.11)] les images directes en cohomologie rigide (cf. aussi [LS, (7.4)] et [C-T, 10]) par la formule

$$\begin{aligned} (3.2.1.1) \quad \mathbb{R}\bar{f}_{rig*}((X, Y)/\mathcal{T}; E) &:= \mathbb{R}\bar{h}_{K*}(j_Y^\dagger E_W \otimes_{\mathcal{O}_{]Y[_{\mathcal{Y}}}} \Omega_{]Y[_{\mathcal{Y}}/\mathcal{T}_K}^\bullet), \\ &:= \mathbb{R}\bar{h}_{Y*}(j_Y^\dagger E_W \otimes_{\mathcal{O}_{]Y[_{\mathcal{Y}}}} \Omega_{]Y[_{\mathcal{Y}}/\mathcal{T}_T}^\bullet); \end{aligned}$$

et la cohomologie de ces complexes est indépendante du  $\mathcal{Y}$  choisi [B 5, (3.1.2)] [LS, 7.4.2].

Lorsque  $X = Y$ , alors  $\bar{f} : X \rightarrow T$  et on obtient la cohomologie convergente :

$$(3.2.1.2) \quad \mathbb{R}\bar{f}_{conv*}(X, Y/\mathcal{T}; E) := \mathbb{R}\bar{f}_{rig*}((X, X)/\mathcal{T}; E).$$

(3.2.2) Sous les hypothèses (3.2.1) supposons de plus  $\bar{h}$  propre : ainsi  $Y$  est une compactification  $\bar{X} = Y$  de  $X$  au-dessus de  $\mathcal{T}$ . Berthelot définit alors  $\mathbb{R}f_{rig}^*(X/\mathcal{T}; E)$  par la formule [B 5, (3.2.3)] ( cf. aussi [LS, 8.2])

$$(3.2.2.1) \quad \mathbb{R}f_{rig}^*(X/\mathcal{T}; E) := \mathbb{R}\bar{f}_{rig}^*((X, \bar{X})/\mathcal{T}; E);$$

et la cohomologie de ce complexe est indépendante du  $\bar{X}$  choisi [B 5, (3.2.2)] [LS, 8.2.1] [CT, 10.5.3].

### 3.3 Changement de base

(3.3.1) Avec les notations de (2.2) on considère un parallélépipède commutatif

(3.3.1.1)

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & X & \xrightarrow{j_Y} & Y & \xrightarrow{i_Y} & \mathcal{Y} \\
 & \nearrow \varphi' & \vdots f & \nearrow \bar{\varphi}' & \vdots \bar{f} & \nearrow \bar{g}' & \downarrow \bar{h} \\
 X' & \xrightarrow{j_{Y'}} & Y' & \xrightarrow{i_{Y'}} & \mathcal{Y}' & & \\
 \downarrow f' & \nearrow \varphi & \downarrow \bar{f}' & \nearrow \bar{\varphi} & \downarrow \bar{h}' & \nearrow \bar{g} & \\
 S' & \xrightarrow{j_{T'}} & T' & \xrightarrow{i_{T'}} & T' & \xrightarrow{\rho'} & \mathcal{W}' \\
 & & & & & \nearrow \theta & \\
 & & & & & T & \xrightarrow{\rho} \mathcal{W}
 \end{array}$$

(Note: The diagram above is a simplified representation of the complex commutative diagram in the image. The original diagram has more nodes and arrows, including  $S, T, \mathcal{Y}$  in the middle row and  $\mathcal{W}$  in the bottom row. The arrows are labeled with various  $j, i, \varphi, \bar{\varphi}, \bar{g}, \bar{h}, \rho, \theta$  and their primed versions.)

dans lequel le cube de gauche est formé de  $k$ -schémas séparés de type fini, les morphismes  $\bar{g}, \bar{h}, \bar{g}', \bar{h}', \rho, \rho', \theta$  sont des morphismes de  $\mathcal{V}$ -schémas formels ( $\mathcal{V}$ -schémas formels que l'on supposera séparés, plats et de type fini), les  $j$  (resp. les  $i$ ) sont des immersions ouvertes (resp. fermées). On suppose  $\theta$  lisse et  $X' = X \times_S S', Y' = Y \times_T T',$  et  $\mathcal{Y}' = \mathcal{Y} \times_{\mathcal{T}} T'.$

On vérifie alors facilement que l'on a

$$(3.3.1.2) \quad ]X'[_{\mathcal{Y}'} = ]X[_{\mathcal{Y}} \times_{]S[_{\mathcal{T}}} ]S'[_{T'}, \quad ]Y'[_{\mathcal{Y}'} = ]Y[_{\mathcal{Y}} \times_{]T[_{\mathcal{T}}} ]T'[_{T'}.$$

Soient  $V$  un voisinage strict de  $]S[_{\mathcal{T}}$  dans  $]T[_{\mathcal{T}}$  et  $V'$  un voisinage strict de  $]S'[_{T'}$  dans  $]T'[_{T'}$  tel que  $V' \subset \bar{g}_K^{-1}(V) \cap ]T'[_{T'}$ ; alors  $W := \bar{h}_K^{-1}(V) \cap ]Y[_{\mathcal{Y}}$  est un voisinage strict de  $]X[_{\mathcal{Y}}$  dans  $]Y[_{\mathcal{Y}}$  et  $W' := \bar{h}'_K^{-1}(V') \cap ]Y'[_{\mathcal{Y}'}$  est un voisinage strict de  $]X'[_{\mathcal{Y}'}$  dans  $]Y'[_{\mathcal{Y}'}$  tel que  $W' \subset \bar{g}'_K^{-1}(W) \cap ]Y'[_{\mathcal{Y}'}$ .

Notons

$$h_V : W \rightarrow V, \quad g_V : V' \rightarrow V, \quad h_{V'} : W' \rightarrow V', \quad \text{et} \quad g'_W : W' \rightarrow W$$

les morphismes induits respectivement par  $\bar{h}_K$ ,  $\bar{g}_K$ ,  $\bar{h}'_K$ , et  $\bar{g}'_K$ .  
Ainsi on dispose d'un cube commutatif

$$(3.3.1.3) \quad \begin{array}{ccccc} & & W & \hookrightarrow & \mathcal{Y}_K \\ & \nearrow g'_W & \downarrow h_V & \nearrow \bar{g}'_K & \downarrow \bar{h}_K \\ W' & \hookrightarrow & \mathcal{Y}'_K & & \\ \downarrow h_{V'} & & \downarrow & & \\ & \nearrow g_V & V & \hookrightarrow & \mathcal{T}_K \\ & & \downarrow \bar{h}'_K & \nearrow \bar{g}_K & \\ V' & \hookrightarrow & \mathcal{T}'_K & & \end{array}$$

dans lequel  $W' = W \times_V V'$  et  $\mathcal{Y}'_K = \mathcal{Y}_K \times_{\mathcal{T}_K} \mathcal{T}'_K$ .

**Lemme (3.3.1.4).** *Avec les hypothèses et notations de (3.3.1) supposons de plus que  $\bar{g}$  soit plat (resp. que  $\bar{g}$  soit lisse sur un voisinage de  $S'$  dans  $\mathcal{T}'$ ). Alors il existe un voisinage strict  $V'$  de  $]S'[_{\mathcal{T}'}$  dans  $]T'[_{\mathcal{T}'}$  tel que  $g_V$  soit plat (resp. que  $g_V$  soit lisse).*

*Démonstration.* Dans le cas plat c'est clair puisque  $\bar{g}_K$  est plat ; dans le cas lisse, c'est le lemme (2.2.1) de [B 3].  $\square$

**Définition (3.3.1.5)** Soit  $\mathcal{E}$  un  $j_T^\dagger \mathcal{O}_V$ -module ; son image inverse surconvergente est définie par la formule

$$(\varphi, \bar{\varphi}, \bar{g})^\dagger(\mathcal{E}) := j_{T'}^\dagger(\bar{g}_K^* \mathcal{E});$$

lorsque  $\mathcal{E}$  est une réalisation d'un isocrystal  $E \in \text{Isoc}^\dagger((S, T)/\mathcal{W})$  on écrira aussi

$$(\varphi, \bar{\varphi})^*(\mathcal{E}) = (\varphi, \bar{\varphi}, \bar{g})^\dagger(\mathcal{E}) = j_{T'}^\dagger(\bar{g}_K^* \mathcal{E}).$$

**Théorème (3.3.2)** *Sous les hypothèses (3.3.1) supposons que  $\bar{h}^{-1}(T) = Y, \bar{h}^{-1}(S) = X$  et  $h_V$  propre (cette dernière hypothèse est vérifiée si  $\bar{h}$  est propre).*

(3.3.2.1) Soit  $E_W$  un  $\mathcal{O}_W$ -module cohérent. Alors, pour tout entier  $i \geq 0$ , on a :

(1)  $R^i \bar{h}_{K*}(j_Y^\dagger E_W)$  est un  $j_T^\dagger \mathcal{O}_{|T|_T}$ -module cohérent et on a un isomorphisme

$$R^i \bar{h}_{K*}(j_Y^\dagger E_W) \xrightarrow{\sim} j_T^\dagger R^i h_{V*}(E_W).$$

(2) (i) On a des isomorphismes de changement de base au sens sur-convergent

$$\begin{aligned} (\varphi, \bar{\varphi}, \bar{g})^\dagger(R^i \bar{h}_{K*} j_Y^\dagger E_W) &\simeq R^i \bar{h}'_{K*}(\bar{g}_K^* j_Y^\dagger E_W) \\ &\simeq R^i \bar{h}'_{K*}(j_{Y'}^\dagger g_W'^* E_W) \\ &\simeq j_{T'}^\dagger R^i \bar{h}'_{V'*}(g_W'^* E_W). \end{aligned}$$

(ii) Si de plus  $\bar{\varphi}^{-1}(S) = S'$ , les isomorphismes précédents deviennent

$$\begin{aligned} \bar{g}_K^* R^i \bar{h}_{K*} j_Y^\dagger E_W &\simeq R^i \bar{h}'_{K*}(j_{Y'}^\dagger g_W'^* E_W) \\ &\simeq j_{T'}^\dagger R^i \bar{h}'_{V'*}(g_W'^* E_W), \end{aligned}$$

et l'on a des isomorphismes

$$\begin{aligned} \bar{g}_V^* R^i h_{V*} j_W^\dagger E_W &\simeq R^i h'_{V'*}(g_W'^* j_W^\dagger E_W) \\ &\simeq R^i h'_{V'*} j_{W'}^\dagger g_W'^* E_W. \end{aligned}$$

(3.3.2.2) Soit  $E_W^\bullet$  un complexe borné de  $\mathcal{O}_V$ -modules plats, à composantes des  $\mathcal{O}_W$ -module cohérents et

$$E_{W'}^\bullet = E_W^\bullet \otimes_{\mathcal{O}_V} \mathcal{O}_{V'} = g_W'^* E_W^\bullet.$$

Alors, pour tout entier  $i \geq 0$ , on a :

(1)  $R^i \bar{h}_{K*}(j_Y^\dagger E_W^\bullet)$  est un  $j_T^\dagger \mathcal{O}_{|T|_T}$ -module cohérent et on a un isomorphisme

$$R^i \bar{h}_{K*}(j_Y^\dagger E_W^\bullet) \xrightarrow{\sim} j_T^\dagger R^i h_{V*} E_W^\bullet.$$

(2) Supposons de plus  $g_V$  plat, alors

(i) On a des isomorphismes de changement de base au sens sur-convergent

$$\begin{aligned} (\varphi, \bar{\varphi}, \bar{g})^\dagger(R^i \bar{h}_{K*} j_Y^\dagger E_W^\bullet) &\simeq R^i \bar{h}'_{K*}(j_{Y'}^\dagger g_W'^* E_W^\bullet) \\ &\simeq j_{T'}^\dagger R^i \bar{h}'_{V'*}(E_{W'}^\bullet). \end{aligned}$$

- (ii) Si de plus  $\overline{\varphi}^{-1}(S) = S'$ , les isomorphismes précédents deviennent

$$\begin{aligned} \overline{g}_K^* R^i \overline{h}_{K*} j_Y^\dagger E_W^\bullet &\simeq R^i \overline{h}'_{K*} (j_{Y'}^\dagger E_{W'}^\bullet) \\ &\simeq j_{T'}^\dagger R^i h'_{V'*} (E_{W'}^\bullet), \end{aligned}$$

et l'on a des isomorphismes

$$\begin{aligned} \overline{g}_V^* R^i h_{V*} j_W^\dagger E_W^\bullet &\simeq R^i h'_{V'*} g_W'^* j_W^\dagger E_W^\bullet \\ &\simeq R^i h'_{V'*} j_{W'}^\dagger g_W'^* E_W^\bullet. \end{aligned}$$

*Démonstration*

Le (1) de (3.3.2.1) résulte de (3.1.4.2) et (1.2.1).

Pour le (i) de (3.3.2.1)(2) on considère le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{j_T} & T \\ \varphi_1 \uparrow & \square & \uparrow \overline{\varphi} \\ S'_1 & \xrightarrow{j_{1T'}} & T' \\ j \uparrow & & \parallel \\ S' & \xrightarrow{j_{T'}} & T' \end{array}$$

dans lequel le carré du haut est cartésien et  $\varphi = \varphi_1 \circ j$ . On a alors une suite d'isomorphismes

$$\begin{aligned} (\varphi, \overline{\varphi}, \overline{g})^\dagger (R^i \overline{h}_{K*} j_Y^\dagger E_W) &\simeq j_{T'}^\dagger \overline{g}_K^* R^i \overline{h}_{K*} j_Y^\dagger E_W && [(3.3.1.5)] \\ &\xrightarrow{\sim} j_{T'}^\dagger j_{1T'}^\dagger g_V^* R^i h_{V*} E_W && [\text{B } 3, (2.1.4.8)] \\ &\xrightarrow{\sim} j_{T'}^\dagger g_V^* R^i \overline{h}_{V*} E_W && [\text{B } 3, (2.1.7)] \\ &\xrightarrow{\sim} j_{T'}^\dagger R^i h'_{V'*} g_W'^* E_W && [\text{Théo}(1.2.1)] \\ &\xleftarrow{\sim} R^i \overline{h}_{K*} j_{Y'}^\dagger g_W'^* E_W && [(3.1.4.2)] \\ &\xleftarrow{\sim} R^i \overline{h}_{K*} \overline{g}_K^* j_Y^\dagger E_W && [\text{B } 3, (2.1.4.8)]. \end{aligned}$$

Pour le (ii) de (3.3.2.1)(2) il suffit de remarquer que les hypothèses impliquent que  $(\varphi, \overline{\varphi}, \overline{g})^\dagger(\mathcal{E}) = \overline{g}_K^*(\mathcal{E})$  pour tout faisceau abélien  $\mathcal{E}$  sur  $\mathcal{T}_K$ ; la dernière assertion résulte de (3.1.4.1), [B 3, (2.1.4.7)] et (1.2.1) comme ci-dessus.

Pour (3.3.2.2) on procède de même en utilisant cette fois le (1.2.2) du théorème (1.2).  $\square$

*Remarque (3.3.3)* En fait, dans le (3.3.2.1) (2) (ii) du théorème précédent, si l'on ne suppose plus l'existence de  $\bar{g}$ , mais que l'on suppose toujours l'existence du carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} W' & \xrightarrow{g'_W} & W \\ h'_{V'} \downarrow & & \downarrow h_V \\ V' & \xrightarrow{g_V} & V, \end{array}$$

on obtient, pour tout  $\mathcal{O}_W$ -module cohérent  $E_W$ , un isomorphisme de changement de base

$$(3.3.3.1) \quad \begin{aligned} g_V^* R^i h_{V*} j_W^\dagger E_W &\xrightarrow{\sim} R^i h'_{V'*} g_W'^* j_W^\dagger E_W \\ &\xrightarrow{\sim} R^i h'_{V'*} j_{W'}^\dagger g_W'^* E_W. \end{aligned}$$

De même, pour le (3.3.2.2)(2)(ii) du théorème, on a un isomorphisme

$$(3.3.3.2) \quad g_V^* R^i h_{V*} j_W^\dagger (E_W^\bullet) \xrightarrow{\sim} R^i h'_{V'*} j_{W'}^\dagger (E_{W'}^\bullet).$$

### 3.4 Surconvergence des images directes.

Nous allons considérer dans le prochain théorème l'une des trois situations suivantes.

**(3.4.1) Dans le premier cas**, nous considérons un diagramme commutatif satisfaisant aux hypothèses de (2.2)

$$(3.4.1.1) \quad \begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{j_Y} & Y & \xrightarrow{i_Y} & \mathcal{Y} \\ f \downarrow & \square & \downarrow \bar{f} & \square & \downarrow \bar{h} \\ S & \xrightarrow{j_T} & T & \xrightarrow{i_T} & \mathcal{T} \xrightarrow{\rho} \mathcal{W}, \end{array}$$

et un diagramme commutatif

$$(3.4.1.2) \quad \begin{array}{ccccccc} S & \xrightarrow{j_T} & T & \xrightarrow{i_T} & \mathcal{T} & \xrightarrow{\rho} & \mathcal{W} \\ \varphi \uparrow & & \bar{\varphi} \uparrow & & \bar{g} \uparrow & & \uparrow \theta \\ S' & \xrightarrow{j_{T'}} & T' & \xrightarrow{i_{T'}} & \mathcal{T}' & \xrightarrow{\rho'} & \mathcal{W}' \end{array}$$

tel qu'en prenant l'image inverse de (3.4.1.1) par (3.4.1.2) on obtienne un parallélogramme commutatif tel que (3.3.1.1). On suppose de plus les carrés

de (3.4.1.1) cartésiens ( $\bar{h}^{-1}(T) = Y$ ,  $\bar{h}^{-1}(S) = X$ ),  $\bar{h}$  propre,  $\bar{h}$  lisse sur un voisinage de  $X$  dans  $\mathcal{Y}$ ,  $\theta$  lisse,  $\rho$  (resp  $\rho'$ ) lisse sur un voisinage de  $S$  dans  $\mathcal{T}$  (resp de  $S'$  dans  $\mathcal{T}'$ ). On suppose également satisfaite l'une des deux hypothèses suivantes :  $\bar{g}$  est lisse sur un voisinage de  $S'$  dans  $\mathcal{T}'$ , ou  $\bar{g}$  est plat.

**(3.4.2) Dans le deuxième cas**, nous considérons un diagramme commutatif tel que (3.4.1.1) et un diagramme commutatif

$$(3.4.2.1) \quad \begin{array}{ccccccc} S & \xrightarrow{j_T} & T & \xrightarrow{i_T} & \mathcal{T} & \xrightarrow{\rho} & \mathcal{W} \\ \varphi \uparrow & & \bar{\varphi} \uparrow & & & & \uparrow \theta \\ S' & \xrightarrow{j_{T'}} & T' & \xrightarrow{i_{T'}} & \mathcal{T}' & \xrightarrow{\rho'} & \mathcal{W}' \end{array}$$

satisfaisant aux mêmes propriétés que (3.4.1.2) excepté l'existence de  $\bar{g}$ , mais en supposant  $\rho$  propre, et nous noterons

$$X' = X \times_S S' \xrightarrow{j_{Y'}} Y' = Y \times_T T'$$

et

$$(3.4.2.2) \quad \begin{array}{ccccc} & & X & \xrightarrow{j_Y} & Y \\ & \nearrow \varphi' & \downarrow f & \nearrow \bar{\varphi}' & \downarrow \bar{f} \\ X' & \xrightarrow{j_{Y'}} & Y' & & \\ \downarrow f' & & \downarrow \bar{f}' & & \\ S & \xrightarrow{j_T} & T & & \\ \nearrow \varphi & & \searrow \bar{\varphi} & & \\ S' & \xrightarrow{j_{T'}} & T' & & \end{array}$$

l'image inverse par  $(\varphi, \bar{\varphi})$  de (3.4.1.1).

**(3.4.3) Dans le troisième cas**, qui généralise le premier, nous considérons des diagrammes commutatifs tels que (3.4.1.1) et (3.4.2.1) mais sans supposer  $\rho$  propre. Par contre nous supposons de plus l'existence d'un diagramme commutatif

$$(3.4.3.1) \quad \begin{array}{ccccccc} X' & \xrightarrow{j_{Y'}} & Y' & \xrightarrow{i_{Y'}} & \mathcal{Y}' & & \\ f' \downarrow & \square & \downarrow \bar{f}' & \square & \downarrow \bar{h}' & & \\ S' & \xrightarrow{j_{T'}} & T' & \xrightarrow{i_{T'}} & \mathcal{T}' & \xrightarrow{\rho'} & \mathcal{W}' \end{array}$$



satisfaisant aux mêmes hypothèses que (3.4.1.1), et dans lequel  $X', Y'$  satisfont aux propriétés de (3.4.2.2).

Dans le cas relevable le théorème suivant résout une conjecture de Berthelot [B 2, (4.3)] et généralise le théorème 5 de loc. cit.

**Théorème (3.4.4)** *Pour tout entier  $i \geq 0$ , on a :*

(3.4.4.1) *Sous les hypothèses (3.4.3), on a :*

(i)  $\overline{f}$  induit un foncteur

$$R^i \overline{f}_{rig*}((X, Y)/\mathcal{T}; -) : Isoc^\dagger((X, Y)/\mathcal{W})_{plat} \longrightarrow Isoc^\dagger((S, T)/\mathcal{W}).$$

(ii) *il existe un morphisme de changement de base*

$$(\varphi, \overline{\varphi})^* R^i \overline{f}_{rig*}((X, Y)/\mathcal{T}; E) \longrightarrow R^i \overline{f}'_{rig*}((X', Y')/\mathcal{T}'; (\varphi', \overline{\varphi}')^*(E))$$

*et celui-ci est un isomorphisme dans  $Isoc^\dagger((S', T')/\mathcal{W}')$ .*

(3.4.4.2) *Sous les hypothèses (3.4.2) on a :*

(i)  $f$  induit un foncteur

$$R^i f_{rig*}(X/\mathcal{T}; -) : Isoc^\dagger(X/\mathcal{W})_{plat} \longrightarrow Isoc^\dagger(S/\mathcal{W}).$$

(ii) *L'isomorphisme de changement de base de (3.4.4.1)(ii) existe et devient*

$$(\varphi, \overline{\varphi})^* R^i f_{rig*}(X/\mathcal{T}; E) \xrightarrow{\sim} R^i \overline{f}'_{rig*}((X', Y')/\mathcal{T}'; (\varphi', \overline{\varphi}')^*(E)).$$

(iii) *Si de plus  $\rho'$  est propre, alors l'isomorphisme de (ii) précédent devient un isomorphisme dans  $Isoc^\dagger(S'/\mathcal{W}')$  :*

$$\varphi^* R^i f_{rig*}(X/\mathcal{T}; E) \xrightarrow{\sim} R^i f'_{rig*}(X'/\mathcal{T}'; \varphi'^*(E)).$$

(iv) *Si  $S' = T'$ , l'isomorphisme du (ii) précédent devient un isomorphisme dans  $Isoc(S'/\mathcal{W}')$  :*

$$\varphi^* j_T^* R^i f_{rig*}(X/\mathcal{T}; E) \xrightarrow{\sim} R^i f'_{conv*}(X'/\mathcal{T}'; \varphi'^*(\hat{E}))$$

*où  $\hat{E} \in Isoc(X/\mathcal{W})$  est l'isocrystal convergent associé à  $E \in Isoc^\dagger(X/\mathcal{W})$  par le foncteur d'oubli  $Isoc^\dagger(X/\mathcal{W}) \rightarrow Isoc(X/\mathcal{W})$ .*

En particulier si  $S' = T' = S$ , on a un isomorphisme

$$j_T^* R^i f_{rig*}(X/\mathcal{T}; E) \xrightarrow{\sim} R^i f_{conv*}(X/\mathcal{T}; \hat{E})$$

(3.4.4.3) Sous les hypothèses (3.4.3) avec  $S = T$  et  $S' = T'$  on a :

(i)  $f$  induit un foncteur

$$R^i f_{conv*} : Isoc(X/\mathcal{W})_{plat} \longrightarrow Isoc(S/\mathcal{W}).$$

(ii) Il existe un isomorphisme de changement de base dans  $Isoc(S'/\mathcal{W}')$

$$\varphi^* R^i f_{conv*}(X/\mathcal{T}; \mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} R^i f'_{conv*}(X'/\mathcal{T}'; \varphi'^*(\mathcal{E})).$$

Avant de donner la preuve du théorème, faisons quelques remarques :

Remarques (3.4.4.4) :

- (i) Sous les hypothèses de (3.4.4.2)(iii), et en supposant de plus que  $\varphi$  est l'identité de  $S$  et  $\theta$  l'identité de  $\mathcal{W}$ , l'isomorphisme de changement de base prouve que  $R^i f_{rig*}(X/\mathcal{T}; E)$  est indépendant du schéma formel  $\mathcal{T}$  dans lequel  $S$  est plongé (avec bien sûr  $\mathcal{T}$  propre sur  $\mathcal{W}$ ,  $\rho$  lisse sur un voisinage de  $S$  dans  $\mathcal{T}$  et  $\bar{h}$  vérifiant (3.4.4)).  
La même remarque s'applique à  $R^i f_{conv*}(X/\mathcal{T}; \mathcal{E})$ .
- (ii) D'après [I,(3.3)] les hypothèses de (3.4.4.2)(iii) sont vérifiées pour  $\mathcal{W} = Spf\mathcal{V}$ ,  $S$  affine et lisse sur  $k$  et certains morphismes  $f$  projectifs et lisses.
- (iii) En conjuguant (i) et (ii) nous en déduisons plus loin [Théorème (3.4.8.2)] que les constructions se recollent pour certains morphismes  $f$  projectifs lisses et  $S$  un  $k$ -schéma lisse ( plus nécessairement affine).
- (iv) Lorsque  $\mathcal{W} = Spf\mathcal{V}$  on peut enlever l'indice "plat" dans (3.4.4.1)(i), (3.4.4.2)(i) et (3.4.4.3)(i) [cf (3.2.1)].

*Démonstration de (3.4.4).*

Le (3.4.4.3) est conséquence directe de (3.4.4.1).

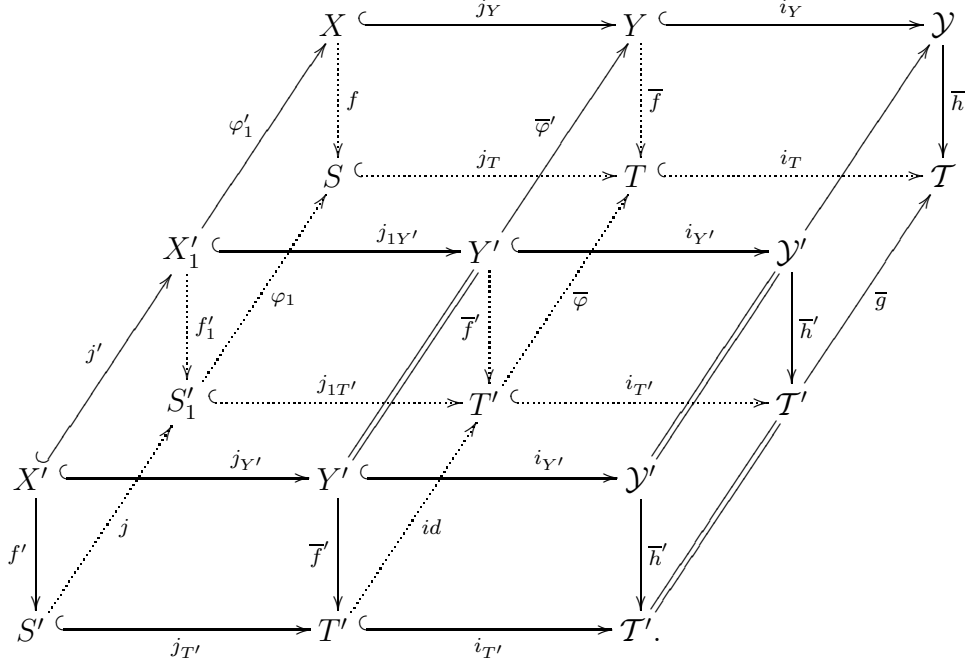
La preuve de (3.4.4.1) et (3.4.4.2) va se faire en six étapes que l'on précise ici :

Dans les quatre premières étapes on va faire la preuve de (3.4.4.1) sous l'hypothèse plus particulière (3.4.1) (i.e. existence de  $\overline{g}$ ) :

- *étape ①* : montrer que  $R^i \overline{f}_{rig*}((X, Y)/\mathcal{T}; E)$  est un  $j_T^\dagger \mathcal{O}_{T[\mathcal{T}]}$ -module cohérent.
- *étape ②* : montrer l'isomorphisme de changement de base (3.4.4.1)(ii) lorsque  $\overline{\varphi}^{-1}(S) = S'$ .
- *étape ③* : achever la preuve de (3.4.4.1)(i).
- *étape ④* : achever la preuve de l'isomorphisme de changement de base (3.4.4.1)(ii).
- *étape ⑤* : on prouve (3.4.4.1) sous les hypothèses (3.4.3).
- *étape ⑥* : on prouve (3.4.4.2).

Plaçons-nous d'abord sous les hypothèses (3.4.1).

On se donne donc un diagramme tel que (3.3.1.1) avec  $\overline{h}^{-1}(T) = Y$ ,  $\overline{h}^{-1}(S) = X$  : on note  $S'_1 = \overline{\varphi}^{-1}(S)$  et  $S' \xrightarrow{j} S'_1 \xrightarrow{\varphi_1} S$  la factorisation de  $\varphi$  où  $j$  est une immersion ouverte ; on en déduit un diagramme commutatif à carrés verticaux cartésiens



Pour  $E \in Isoc^\dagger((X, Y)/\mathcal{W})$  on notera  $(\varphi, \bar{\varphi})^*(E)$  son image inverse par le couple  $(\varphi, \bar{\varphi})$  [B 3, (2.3.2)(iv)] pour préciser la dépendance en  $\varphi$  et  $\bar{\varphi}$  : d'autres images inverses seront utilisées, que le contexte précisera (cf. déf. (3.3.1.5)).

**Étape ①.** Avec les notations de (3.2) il existe un voisinage strict  $W$  de  $]X[_Y$  dans  $]Y[_Y$  tel que  $E_Y := j_Y^\dagger E_W$  soit une réalisation de  $E$ , et d'après (2.2.2.2) on peut supposer que  $W$  est de la forme  $W = \bar{h}_Y^{-1}(V)$  pour un voisinage strict  $V$  de  $]S[_T$  dans  $]T[_T$  ; de plus on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} ]X[_Y & \hookrightarrow & W & \xrightarrow{\alpha_W} & \mathcal{Y}_K \\ \bar{h}_X \downarrow & & h_V \downarrow & & \downarrow \bar{h}_K \\ ]S[_T & \hookrightarrow & V & \xrightarrow{\alpha_V} & \mathcal{T}_K \end{array}$$

dans lequel les carrés sont cartésiens et où les flèches horizontales sont des immersions ouvertes,  $\bar{h}_K$  est propre et  $\bar{h}_X$  est propre et lisse [(2.2.3.2)(i)] : quitte à restreindre  $V$  on peut supposer via [(2.2.3.2)(ii)] que  $h_V$  est propre et lisse.

Or  $R^{i+j}\bar{f}_{rig}^*((X, Y)/T; E)$  est l'aboutissement d'une suite spectrale de terme  $E_1^{i,j}$  donné par

$$E_1^{i,j} = R^j \bar{h}_{K*}(j_Y^\dagger E_W \otimes_{\mathcal{O}_{]Y[_Y}} \Omega_{]Y[_Y/T_K}^i)$$

avec filtration

$$\begin{aligned} Fil^i &:= Fil^i(j_Y^\dagger E_W \otimes \Omega_{Y[y]/\mathcal{T}_K}^\bullet) \\ &= j_Y^\dagger E_W \otimes \Omega_{Y[y]/\mathcal{T}_K}^{\geq i}, \end{aligned}$$

et on a une suite d'isomorphismes

$$\begin{aligned} j_Y^\dagger E_W \otimes_{\mathcal{O}_{Y[y]}} \Omega_{Y[y]/\mathcal{T}_K}^i &= (\alpha_W^* j_W^\dagger E) \otimes_{\mathcal{O}_{Y[y]}} \Omega_{Y[y]/\mathcal{T}_K}^i \\ &\simeq \alpha_W^* (j_W^\dagger E_W \otimes_{\mathcal{O}_W} \alpha_W^* (\Omega_{Y[y]/\mathcal{T}_K}^i)) \\ &\simeq \alpha_W^* (j_W^\dagger E_W \otimes_{\mathcal{O}_W} \Omega_{W/\mathcal{T}_K}^i) && \text{car } \alpha_W \text{ est étale} \\ &\simeq \alpha_W^* (j_W^\dagger E_W \otimes_{\mathcal{O}_W} \Omega_{W/V}^i) && \text{car } \alpha_V \text{ est étale} \\ &\simeq \alpha_W^* (j_W^\dagger \mathcal{O}_W \otimes_{\mathcal{O}_W} E_W \otimes_{\mathcal{O}_W} \Omega_{W/V}^i) [B\ 3, (2.1.3)(ii)] \\ &\simeq \alpha_W^* j_W^\dagger (E_W \otimes_{\mathcal{O}_W} \Omega_{W/V}^i) && [\text{loc. cit.}] \\ &= j_Y^\dagger (E_W \otimes_{\mathcal{O}_W} \Omega_{W/V}^i), \end{aligned}$$

où  $\Omega_{W/V}^i$  est un  $\mathcal{O}_W$ -module cohérent et localement libre [(2.2.3.2(i)). D'après (3.1.4) on en déduit un isomorphisme

$$\begin{aligned} E_1^{i,j} &= R^j \bar{h}_{K*} (j_Y^\dagger E_W \otimes_{\mathcal{O}_{Y[y]}} \Omega_{Y[y]/\mathcal{T}_K}^i) \\ &\xrightarrow{\sim} j_T^\dagger R^j h_{V*} (E_W \otimes_{\mathcal{O}_W} \Omega_{W/V}^i); \end{aligned}$$

or  $R^j h_{V*} (E_W \otimes_{\mathcal{O}_W} \Omega_{W/V}^i)$  est un  $\mathcal{O}_V$ -module cohérent d'après le théorème (1.2), donc  $E_1^{i,j}$  est un  $j_T^\dagger \mathcal{O}_{T[\mathcal{T}]}$ -module cohérent. Comme la filtration  $Fil^i$  est finie, il en résulte que l'aboutissement  $R^{i+j} \bar{f}_{rig*}((X, Y)/\mathcal{T}; E)$  est un  $j_T^\dagger \mathcal{O}_{T[\mathcal{T}]}$ -module cohérent. Remarquons que pour prouver cette cohérence on aurait pu appliquer le (1) de (3.3.2.2), puisque  $E_W$  est un  $\mathcal{O}_W$ -module plat.

**Etape ②.** On a vu à l'étape ① que

$$\begin{aligned} R^i \bar{f}_{rig*}((X, Y)/\mathcal{T}; E) &:= R^i \bar{h}_{K*} (j_Y^\dagger E_W \otimes_{\mathcal{O}_{Y[y]}} \Omega_{Y[y]/\mathcal{T}_K}^\bullet) \\ &\simeq R^i \bar{h}_{K*} (j_Y^\dagger (E_W \otimes_{\mathcal{O}_W} \Omega_{W/V}^\bullet)), \end{aligned}$$

et les  $E_W \otimes_{\mathcal{O}_W} \Omega_{W/V}^j$  sont des  $\mathcal{O}_W$ -module cohérents et plats sur  $\mathcal{O}_V$  car  $h_V$  est lisse.

Puisque ou bien  $\bar{g}$  est plat, ou bien  $\bar{g}$  est lisse sur un voisinage de  $S'$  dans  $\mathcal{T}'$ , on peut d'après (3.3.1.4) et quitte à restreindre  $V$  supposer  $g_V$  plat : le (2) de (3.3.2.2) nous fournit alors l'isomorphisme de changement de base

$$(3.4.4.1.1) \quad \bar{g}_K^* R^i \bar{f}_{rig*}((X, Y)/\mathcal{T}; E) \xrightarrow{\sim} R^i \bar{f}'_{rig*}((X'_1, Y')/\mathcal{T}'; (\varphi'_1, \bar{\varphi}')^*(E)).$$

**Etape ③.** En reprenant la construction de la connexion de Gauß-Manin décrite explicitement par Katz dans [K 3, 3.4 et 3.5] on prouve que cette connexion agit aussi bien sur le terme  $E_1^{i,j}$  que sur l'aboutissement [loc. cit., theo. 3.5] : ainsi  $R^i f_{rig*}(X/\mathcal{T}; E)$  est muni d'une connexion  $\nabla^i$  (de Gauß-Manin) intégrable. Pour construire cette connexion de Gauß-Manin  $\nabla^i$  on peut aussi établir des isomorphismes [B 3, (2.2.5.1)] vérifiant la condition de cocycles : cette construction coïncide avec la précédente [B 1,V, 3.6.3, 3.6.4, 3.6.5], et cette deuxième construction va nous permettre d'établir la surconvergence de  $\nabla^i$ .

On a un diagramme commutatif à carrés cartésiens

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{Y} & \xrightarrow{\Gamma_{\bar{h}}=(1_{\mathcal{Y}} \times \bar{h})} & \mathcal{Y} \times_{\mathcal{W}} \mathcal{T} & \xrightarrow{p'_1} & \mathcal{Y} \\ \bar{h} \downarrow & & \downarrow \bar{h} \times 1_{\mathcal{T}} & & \downarrow \bar{h} \\ \mathcal{T} & \xrightarrow{\Delta_{\mathcal{T}}} & \mathcal{T} \times_{\mathcal{W}} \mathcal{T} & \xrightarrow{p_{1\mathcal{T}}} & \mathcal{T}, \end{array}$$

où  $p_{1\mathcal{T}}$ ,  $p'_1$  sont les premières projections,  $\Gamma_{\bar{h}}$  est le morphisme graphe de  $\bar{h}$  et  $\Delta_{\mathcal{T}}$  est le morphisme diagonal :  $\Gamma_{\bar{h}}$  est une immersion fermée puisque  $\mathcal{T}$  est séparé sur  $\mathcal{W}$ ; on note alors  $]Y[_{\mathcal{Y} \times_{\mathcal{W}} \mathcal{T}}$  le tube de  $Y$  dans  $\mathcal{Y} \times_{\mathcal{W}} \mathcal{T}$  pour l'immersion fermée composée  $Y \hookrightarrow \mathcal{Y} \xrightarrow{\Gamma_{\bar{h}}} \mathcal{Y} \times_{\mathcal{W}} \mathcal{T}$ , et  $]T[_{\mathcal{T}^2}$  celui de  $T$  dans  $\mathcal{T}^2$  pour l'immersion fermée  $T \hookrightarrow \mathcal{T} \xrightarrow{\Delta_{\mathcal{T}}} \mathcal{T} \times_{\mathcal{W}} \mathcal{T}$ .

D'après (2.1.2) on a alors un diagramme commutatif à carré cartésien

$$(3.4.4.1.2) \quad \begin{array}{ccccc} & & & & ]Y[_{\mathcal{Y}^2} \\ & & & \swarrow p_{1\mathcal{Y}} & \\ & & & & \downarrow h''_1 \\ ]Y[_{\mathcal{Y}} & \xleftarrow{p'_1} & ]Y[_{\mathcal{Y} \times \mathcal{T}} & & \\ \bar{h}_{\mathcal{Y}} \downarrow & & \downarrow h'_1 & & \downarrow \tilde{h} \\ ]T[_{\mathcal{T}} & \xleftarrow{p_{1\mathcal{T}}} & ]T[_{\mathcal{T}^2} & & \end{array}$$

où  $h'_1$ ,  $h''_1$ ,  $\tilde{h}$  sont induits respectivement par  $\bar{h}_K \times 1_{\mathcal{T}_K}$ ,  $1_{\mathcal{Y}_K} \times \bar{h}_K$  et  $\bar{h}_K \times \bar{h}_K$ . On a de même un diagramme analogue (3.4.4.1.2)' avec  $p_2$  à la place de  $p_1$  et  $h'_2$ ,  $h''_2$ ...

D'après (3.2.2.1) et [B 5, (3.2.3) et (3.1.11)(i)] on a les isomorphismes canon-

iques

$$\begin{aligned}
R^i \overline{f}_{rig*}((X, Y)/\mathcal{T}^2; E) &= R^i \tilde{h}_*(p_{1Y}^*(E_Y) \otimes \Omega_{Y[y^2/\mathcal{T}_K^2]}^\bullet) \\
&\simeq R^i h'_{1*}(p_1'^*(E_Y) \otimes \Omega_{Y[y \times \mathcal{T}/\mathcal{T}_K^2]}^\bullet) \\
&\xleftarrow{\sim} p_{1\mathcal{T}}^* R^i \overline{h}_Y^*(E_Y \otimes \Omega_{Y[y/\mathcal{T}_K]}^\bullet) \quad [\text{étape } \textcircled{2}] \\
&= p_{1\mathcal{T}}^* R^i \overline{f}_{rig*}((X, Y)/\mathcal{T}; E);
\end{aligned}$$

l'avant-dernier isomorphisme ci-dessus est réalisable via l'étape  $\textcircled{2}$  car  $\rho$  étant lisse sur un voisinage de  $S$  dans  $\mathcal{T}$ ,  $p_{1\mathcal{T}} : \mathcal{T} \times_{\mathcal{W}} \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$  est lisse sur un voisinage de  $S$  dans  $\mathcal{T} \times_{\mathcal{W}} \mathcal{T}$ .

Or l'isomorphisme [B 3, (2.2.5.1)]

$$p_{2Y}^*(E_Y) \xrightarrow{\sim} p_{1Y}^*(E_Y)$$

assurant l'existence d'une connexion (surconvergente) sur  $E_Y$  fournit aussi les isomorphismes

$$R^i \tilde{h}_*(p_{2Y}^*(E_Y) \otimes \Omega_{Y[y^2/\mathcal{T}_K^2]}^\bullet) \xrightarrow{\sim} R^i \tilde{h}_*(p_{1Y}^*(E_Y) \otimes \Omega_{Y[y^2/\mathcal{T}_K^2]}^\bullet),$$

c'est-à-dire, par les mêmes arguments que ci-dessus, des isomorphismes

$$(3.4.4.1.3) \quad p_{2\mathcal{T}}^* R^i \overline{f}_{rig*}((X, Y)/\mathcal{T}; E) \xrightarrow{\sim} R^i \overline{f}_{rig*}((X, Y)/\mathcal{T}^2; E) \xleftarrow{\sim} p_{1\mathcal{T}}^* R^i \overline{f}_{rig*}((X, Y)/\mathcal{T}; E)$$

satisfaisant aux conditions de [B 3, (2.2.5)]. De plus la connexion surconvergente sur  $R^i \overline{f}_{rig*}((X, Y)/\mathcal{T}; E)$  obtenue par l'isomorphisme (3.4.4.1.3) est bien celle de Gauß-Manin [B 1, V, 3.6.4].

Ceci achève la preuve de l'étape  $\textcircled{3}$ .

**Étape  $\textcircled{4}$ .** Puisque  $R^i \overline{f}_{rig*}((X, Y)/\mathcal{T}; E)$  est un isocrystal surconvergent le long de  $T \setminus S$ , son image inverse par  $(\varphi, \overline{\varphi})$  est, d'après l'étape  $\textcircled{2}$ , l'image inverse par  $(j, id_{T'})$  de l'isocrystal surconvergent (le long de  $T' \setminus S'_1$ )

$$R^i \overline{f}'_{rig*}((X'_1, Y')/\mathcal{T}'; (\varphi'_1, \overline{\varphi}')^*(E)) = j_{1T'}^\dagger(R^i h'_{V'^*}(g_W'^*(E_W) \otimes_{\mathcal{O}_{W'}} \Omega_{W'/V'}^\bullet)) \text{ (cf (3.3.1.3)).}$$

Le  $\mathcal{O}_{V'}$ -module

$$\mathcal{E}_{V'}^i := R^i h'_{V'^*}(g_W'^*(E_W) \otimes_{\mathcal{O}_{W'}} \Omega_{W'/V'}^\bullet)$$

est cohérent, et par définition des images inverses [B 3, (2.3.2)(iv)] on a

$$(j, id_{T'})^*(j_{1T'}^\dagger(\mathcal{E}_{V'}^i)) = j_{T'}^\dagger(\mathcal{E}_{V'}^i);$$

or d'après [(3.3.2.2)(1)] on a :

$$\begin{aligned} j_{T'}^\dagger(\mathcal{E}_{V'}^i) &\simeq R^i \bar{h}'_{K^*}(j_{Y'}^\dagger(g_W^{J^*}(E_W)) \otimes_{\mathcal{O}_{W'}} \Omega_{W'/V'}^\bullet) \\ &=: R^i \bar{f}_{rig^*}((X', Y')/T'; (\varphi, \bar{\varphi})^*(E)), \end{aligned}$$

d'où l'isomorphisme de changement de base

$$(3.4.4.1.4) \quad (\varphi, \overline{\varphi})^* R^i \overline{f}_{rig*}((X, Y)/\mathcal{T}; E) \simeq R^i \overline{f}'_{rig*}((X', Y')/\mathcal{T}'; (\varphi', \overline{\varphi}')^*(E)),$$

qui est celui de (3.4.4.1)(ii).

**Etape (5).** Plaçons nous sous les hypothèses (3.4.3) et prouvons (3.4.4.1) dans ce cas.

Considérons les parallélépipèdes commutatifs suivants dans lesquels les faces verticales sont cartésiennes

$$(3.4.4.1.5) \quad \begin{array}{ccccccc} & & X^{\mathbb{C}} & \xrightarrow{j_Y} & Y^{\mathbb{C}} & \xrightarrow{i_Y} & \mathcal{Y} \\ & \nearrow \varphi' & \downarrow f & & \downarrow \bar{f} & \nearrow p_{1\mathcal{Y}} & \downarrow \bar{h} \\ X'^{\mathbb{C}} & \xrightarrow{j_{Y'}} & Y'^{\mathbb{C}} & \xrightarrow{i_{Y'}} & \mathcal{Y}'' & & \\ \downarrow f' & & \downarrow \bar{f}' & & \downarrow \bar{h}'' & & \\ S^{\mathbb{C}} & \xrightarrow{j_T} & T^{\mathbb{C}} & \xrightarrow{i_T} & T & \xrightarrow{\rho} & \mathcal{W} \\ & \nearrow \varphi & \downarrow \bar{\varphi} & & \nearrow p_{1T''} & & \\ S'^{\mathbb{C}} & \xrightarrow{j_{T'}} & T'^{\mathbb{C}} & \xrightarrow{i_{T'}} & T'' = T \times_{\mathcal{W}} T' & & \end{array}$$

$$(3.4.4.1.6) \quad \begin{array}{ccccccc} & & X' & \xrightarrow{j_{Y'}} & Y' & \xrightarrow{i_{Y'}'''} & \mathcal{Y}''' \\ & & \parallel & & \parallel & & \downarrow \bar{h}''' \\ X' & \xrightarrow{j_{Y'}} & Y' & \xrightarrow{i_{Y'}} & \mathcal{Y}' & & \\ \downarrow f' & & \downarrow f' & & \downarrow \bar{f}' & & \\ S' & \xrightarrow{j_{T'}} & T' & \xrightarrow{i_{T'}} & T'' & \xrightarrow{\rho'} & \mathcal{W}' \\ & & \swarrow id & & \nwarrow id & & \\ & & S' & \xrightarrow{j_{T'}} & T' & \xrightarrow{\rho'} & \mathcal{W}' \end{array}$$

où  $p_i$  est la projection sur le  $i^e$  facteur et  $i''_{T'} = (i_T \circ \overline{\varphi}, i_{T'})$ .



On forme aussi le carré cartésien

$$(3.4.4.1.7) \quad \begin{array}{ccc} \tilde{\mathcal{Y}} & \xrightarrow{u_2} & \mathcal{Y}'' \\ u_1 \downarrow & & \downarrow \bar{h}'' \\ \mathcal{Y}''' & \xrightarrow{\bar{h}'''} & \mathcal{T}'' \end{array}.$$

Comme  $u_1$  et  $u_2$  sont propres, et lisses sur un voisinage de  $X'$  dans  $\tilde{\mathcal{Y}}$ , on peut d'après [B 5, (3.1.2)] et [LS, 7.4.2] faire le calcul de

$$R^i \bar{f}'_{rig*}((X', Y')/\mathcal{T}'; (\varphi', \bar{\varphi}')^*(E))$$

à l'aide de la cohomologie de de Rham, aussi bien avec  $\bar{h}'''$ ,  $\bar{h}''' \circ u_1 = \bar{h}'' \circ u_2$  ou  $\bar{h}''$ , qui sont tous les trois propres, et lisses sur un voisinage de  $X'$  respectivement dans  $\mathcal{Y}'''$ ,  $\tilde{\mathcal{Y}}$  et  $\mathcal{Y}''$ . Or  $p_{1\mathcal{T}''}$  (resp  $p_{2\mathcal{T}''}$ ) étant lisse sur un voisinage de  $S'$  dans  $\mathcal{T}''$ , on a d'après l'étape ④ des isomorphismes de changement de base (le premier calculé via  $\bar{h}''$  et le second via  $\bar{h}'''$ )

$$(\varphi, \bar{\varphi}, p_{1\mathcal{T}''})^* R^i \bar{f}'_{rig*}((X, Y)/\mathcal{T}; E) \simeq R^i \bar{f}'_{rig*}((X', Y')/\mathcal{T}''; (\varphi', \bar{\varphi}')^*(E))$$

et

$$(id_{S'}, id_{\mathcal{T}'}, p_{2\mathcal{T}''})^* R^i \bar{f}'_{rig*}((X', Y')/\mathcal{T}'; (\varphi', \bar{\varphi}')^*(E)) \simeq R^i \bar{f}'_{rig*}((X', Y')/\mathcal{T}'; (\varphi', \bar{\varphi}')^*(E))$$

et les seconds membres coïncident en faisant le calcul de la cohomologie de de Rham via  $\bar{h}''' \circ u_1 = \bar{h}'' \circ u_2$ . Ceci achève la preuve de l'isomorphisme de changement de base.

**Etape ⑥.** L'étape ③ reste inchangée puisqu'on peut faire les changements de base par  $p_{1\mathcal{T}}$  et  $p_{2\mathcal{T}}$  car ils sont lisses sur un voisinage de  $S$  dans  $\mathcal{T} \times_{\mathcal{W}} \mathcal{T}$  : en particulier  $R^i \bar{f}'_{rig*}((X, Y)/\mathcal{T}; E)$  est un isocrystal surconvergent le long de  $T \setminus S$ . Soit  $\mathcal{W}_0$  la réduction sur  $k$  de  $\mathcal{W}$ . On note

$$(3.4.4.2.1)$$

$$\begin{array}{ccccc} X'' \hookrightarrow & \xrightarrow{j_{Y''}} & Y'' \hookrightarrow & \xrightarrow{i_{Y''}} & \mathcal{Y}'' = \mathcal{Y} \times_{\mathcal{W}} \mathcal{T}' \\ f'' \downarrow & & \bar{f}'' \downarrow & & \downarrow \bar{h}'' \\ S'' = S \times_{\mathcal{W}_0} S' \hookrightarrow & \xrightarrow{j_{T''} = j_T \times j_{T'}} & T'' := T \times_{\mathcal{W}_0} T' \hookrightarrow & \xrightarrow{i_{T''} = i_T \times i_{T'}} & \mathcal{T}'' := \mathcal{T} \times_{\mathcal{W}} \mathcal{T}' \end{array}$$

l'image inverse de (2.2.1) par le diagramme commutatif

$$(3.4.4.2.2) \quad \begin{array}{ccccc} S \hookrightarrow & \xrightarrow{j_T} & T \hookrightarrow & \xrightarrow{i_T} & \mathcal{T} \\ p_{1S} \uparrow & & p_{1T} \uparrow & & \uparrow p_{1\mathcal{T}''} \\ S'' \hookrightarrow & \xrightarrow{j_{T''}} & T'' \hookrightarrow & \xrightarrow{i_{T''}} & \mathcal{T}'' \end{array}$$

où les  $p_1$  sont les projections sur le premier facteur :  $\bar{h}''$  est propre et  $\bar{h}''$  est lisse sur un voisinage de  $X''$  dans  $\mathcal{Y}''$ .

De même

$$(3.4.4.2.3) \quad \begin{array}{ccccc} X' & \xrightarrow{j_{Y'}} & Y' & \xrightarrow{i_{Y''} \circ \psi_Y} & \mathcal{Y}'' \\ f' \downarrow & & \downarrow \bar{f}' & & \downarrow \bar{h}'' \\ S' & \xrightarrow{j_{T'}} & T' & \xrightarrow{i_{T''} \circ \psi_T} & T'' \end{array}$$

est l'image inverse de (3.4.4.2.1) par le diagramme commutatif

$$(3.4.4.2.4) \quad \begin{array}{ccccc} S'' & \xrightarrow{j_{T''}} & T'' & \xrightarrow{i_{T''}} & T'' \\ \psi_S=(\varphi, 1_{S'}) \uparrow & & \uparrow \psi_T=(\bar{\varphi}, 1_{T'}) & & \parallel id_{T''} \\ S' & \xrightarrow{j_{T'}} & T' & \xrightarrow{i_{T''} \circ \psi_T} & T'' \end{array}$$

où  $\psi_S, \psi_T$  sont des immersions fermées et  $\psi_Y$  est l'immersion fermée définie par le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{\psi_Y} & Y'' \\ \bar{f}' \downarrow & & \downarrow \bar{f}'' \\ T' & \xrightarrow{\psi_T} & T'' \end{array}.$$

En appliquant (3.4.4.1)(ii) au changement de base par  $p_{1T}$  et  $\psi_T$  on obtient un isomorphisme

$$\psi_T^* p_{1T}^* R^i \bar{f}_{rig*}((X, Y)/T; E) \simeq R^i \bar{f}'_{rig*}((X', Y')/T''; (\varphi', \bar{\varphi}')^*(E)).$$

Puisque le carré suivant commute

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{i_T} & T \\ p_{1T} \circ \psi_T = \bar{\varphi} \uparrow & & \uparrow p_{1T''} \\ T' & \xrightarrow{i_{T''} \circ \psi_T} & T'' \end{array},$$

pour prouver (3.4.4.2) il suffit d'après [B 3, (2.3.2)(iv)] de prouver que la projection sur le second facteur  $p_{2T''} : T'' \rightarrow T'$  induit un isomorphisme

$$p_{2T''}^* R^i \bar{f}'_{rig*}((X', Y')/T'; (\varphi', \bar{\varphi}')^*(E)) \simeq R^i \bar{f}'_{rig*}((X', Y')/T''; (\varphi', \bar{\varphi}')^*(E)).$$

Considérons alors le diagramme commutatif à carré cartésien

$$\begin{array}{ccccccc}
X' & \xrightarrow{j_{Y'}} & Y' & \xrightarrow{\psi_Y} & Y'' & \xrightarrow{i_{Y''}} & \mathcal{Y}'' \\
& & & & & & \searrow \text{Id}_{\mathcal{Y}''} \\
& & & & & & \mathcal{Y}''' \xrightarrow{p_{3\mathcal{Y}}} \mathcal{Y}'' \\
& & & & & \searrow i_{\mathcal{Y}''} & \downarrow \bar{h}'' \\
& & & & & \mathcal{Y}''' & \downarrow \bar{h}''' \\
& & & & & \downarrow \bar{h}'' & \downarrow p_{2\mathcal{T}''} \\
& & & & & \mathcal{T}'' & \downarrow p_{2\mathcal{T}''} \\
& & & & & \downarrow \bar{h}'' & \mathcal{T}'
\end{array}$$

D'après les hypothèses faites sur  $\rho$ ,  $p_{2\mathcal{T}''}$  est propre et  $p_{2\mathcal{T}''}$  est lisse sur un voisinage de  $S''$  dans  $\mathcal{T}''$  : ainsi  $p_{2\mathcal{T}''} \circ \bar{h}''$  est propre et  $p_{2\mathcal{T}''} \circ \bar{h}''$  est lisse sur un voisinage de  $X'$  dans  $\mathcal{Y}''$  ; par suite en appliquant (3.4.1.1) on en déduit que

$$R^i \bar{f}'_{rig*}((X', Y')/\mathcal{T}'; (\varphi', \bar{\varphi}')^*(E)) \text{ et } R^i \bar{f}'_{rig*}((X', Y')/\mathcal{T}''; (\varphi', \bar{\varphi}')^*(E))$$

sont des isocristaux surconvergentes et puisque  $i_{\mathcal{Y}''}$  est propre, que l'on a des isomorphismes (où  $p_{1\mathcal{Y}} : \mathcal{Y}'' \rightarrow \mathcal{Y}$  est la première projection)

$$\begin{aligned}
p_{2\mathcal{T}''}^* R^i \bar{f}'_{rig*}((X', Y')/\mathcal{T}'; (\varphi', \bar{\varphi}')^*(E)) &\simeq R^i \bar{h}'''_* p_{3\mathcal{Y}}^* ((p_{1\mathcal{Y}}^* E_{\mathcal{Y}}) \otimes \Omega_{Y'[\mathcal{Y}''/\mathcal{T}'_K]}^\bullet) \\
&\simeq R^i \bar{h}'''_* (p_{3\mathcal{Y}}^* p_{1\mathcal{Y}}^* (E_{\mathcal{Y}}) \otimes \Omega_{Y'[\mathcal{Y}'''/\mathcal{T}'_K]}^\bullet) \quad [(2.1.2)] \\
&\simeq R^i \bar{h}''_* (i_{\mathcal{Y}''}^* p_{3\mathcal{Y}}^* p_{1\mathcal{Y}}^* (E_{\mathcal{Y}}) \otimes \Omega_{Y'[\mathcal{Y}''/\mathcal{T}'_K]}^\bullet) \quad [B\ 5, (3.2.2)] \\
&= R^i \bar{f}'_{rig*}((X', Y')/\mathcal{T}''; (\varphi', \bar{\varphi}')^*(E)) \quad [(3.2.2)].
\end{aligned}$$

D'où (3.4.4.2), compte tenu des définitions (3.2).  $\square$

### (3.4.5)

(3.4.5.1) Supposons donné un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
X & \xrightarrow{j_{\mathcal{Y}}} & \mathcal{Y} & & \\
f \downarrow & & \square & & \downarrow \bar{h} \\
S & \xrightarrow{j_{\mathcal{T}}} & \mathcal{T} & \xrightarrow{\rho} & \mathcal{W},
\end{array}$$

dans lequel le carré est cartésien,  $f$  est un morphisme propre de  $k$ -schémas séparés de type fini,  $\bar{h}$  et  $\rho$  sont des morphismes de  $\mathcal{V}$ -schémas formels séparés plats de type fini,  $\bar{h}$  est propre,  $\bar{h}$  (resp  $\rho$ ) est lisse sur un voisinage de  $X$

(resp  $S$ ) dans  $\mathcal{Y}$  (resp  $\mathcal{T}$ ),  $j_{\mathcal{Y}}$  et  $j_{\mathcal{T}}$  sont des immersions. Soit  $T$  l'adhérence schématique de  $S$  dans  $\mathcal{T}$  et

$$S \xhookrightarrow{j_T} T \xhookrightarrow{i_T} \mathcal{T}$$

la factorisation de  $j_T : S \rightarrow \mathcal{T}$  est une immersion ouverte dominante et  $i_T$  est une immersion fermée. On note  $Y = \bar{h}^{-1}(T)$  et  $\bar{f} := \bar{h}|_Y : Y \rightarrow T$ . Avec les notations précédentes on est donc dans la situation (2.2.1) avec  $\bar{f}^{-1}(S) = X$ .

(3.4.5.2) Supposons de plus donné un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} S & \xhookrightarrow{j_T} & T & \xrightarrow{\rho} & \mathcal{W} \\ \varphi \uparrow & & \uparrow \bar{g} & & \uparrow \theta \\ S' & \xhookrightarrow{j_{T'}} & T' & \xrightarrow{\rho'} & \mathcal{W}' \end{array}$$

dans lequel  $\varphi$  est un morphisme de  $k$ -schémas séparés de type fini,  $\bar{g}$ ,  $\rho'$  sont des morphismes séparés de  $\mathcal{V}$ -schémas formels séparés plats de type fini,  $\bar{g}$  et  $\rho'$  sont lisses sur un voisinage de  $S'$  dans  $T'$ ,  $\theta$  est lisse et  $j_{T'}$  est une immersion.

On définit  $f' : X' \rightarrow S'$  par le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{\varphi'} & X \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ S' & \xrightarrow{\varphi} & S \end{array}$$

On note  $T'$  l'adhérence schématique de  $S'$  dans  $\mathcal{T}'$  et

$$S' \xhookrightarrow{j_{T'}} T' \xhookrightarrow{i_{T'}} \mathcal{T}'$$

la factorisation de  $j_{T'}$  par l'immersion ouverte dominante  $j_{T'}$  et l'immersion fermée  $i_{T'} : T' \rightarrow \mathcal{T}'$  induit un  $k$ -morphisme  $\bar{\varphi} : T' \rightarrow T$ .

Par image inverse de (3.4.5.1) par (3.4.5.2) on obtient un parallélogramme commutatif tel que (3.3.1.1), dont on reprend les notations; on en déduit :

**Corollaire (3.4.5.3).** *Sous les hypothèses (3.4.5.1) et (3.4.5.2) les parties (3.4.4.1) et (3.4.4.3) du théorème (3.4.4) sont valides.*

(3.4.5.4) Supposons donné cette fois un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} S & \xhookrightarrow{j_T} & T & \xrightarrow{\rho} & \mathcal{W} \\ \varphi \uparrow & & & & \uparrow \theta \\ S' & \xhookrightarrow{j_{T'}} & T' & \xrightarrow{\rho'} & \mathcal{W}' \end{array}$$

**Corollaire (3.4.5.5).** *Sous les hypothèses (3.4.5.1) et (3.4.5.4) la partie (3.4.4.2) du théorème (3.4.4) s'applique.*

Soient  $i_s : s = \text{Spec } k(s) \hookrightarrow S$  un point fermé de  $S$  et  $f_s : X_s \rightarrow s$  la fibre de  $f$  en  $s$ . On note  $\mathcal{V}(s) = W(k(s)) \otimes_W \mathcal{V}$ , où  $W = W(k)$ ,  $W(k(s))$  sont les anneaux de vecteurs de Witt à coefficients dans  $k$  et  $k(s)$  respectivement, et  $K(s)$  le corps des fractions de  $\mathcal{V}(s)$ . Le morphisme  $i_s$  définit des foncteurs images inverses [B 3, (2.3.6)]

qui, pour  $\rho$  propre, devient

et qui, pour  $S = T$ , devient

Nous allons donner maintenant une réalisation explicite de ces foncteurs : dans la notation  $i_s^*$ , le  $()^\dagger$  n'est pas utile, sauf pour insister que l'on travaille avec la catégorie surconvergente, et pas seulement la convergente.

Dans le carré cartésien de  $\mathcal{V}$ -schémas formels plats et séparés

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U}(s) & \xrightarrow{u'} & \mathcal{S} \\ v' \downarrow & & \downarrow v \\ \mathrm{Spf} \mathcal{V}(s) & \xrightarrow{u} & \mathrm{Spf} \mathcal{V} \end{array}$$

les morphismes  $u$  et  $u'$  (resp  $v$  et  $v'$ ) sont finis étales (resp lisses et séparés). Par lissité de  $\mathcal{S}$  sur  $\mathcal{V}$  le morphisme composé

$$\mathrm{Spec} k(s) \xrightarrow{i_s} \mathcal{S} \hookrightarrow \mathcal{S}$$

se relève en un morphisme séparé

$$g_s : \mathrm{Spf} \mathcal{V}(s) \longrightarrow \mathcal{S}$$

tel que  $g_s \circ v' = u'$  donc  $v'$  est fini et  $v'$  est fini étale puisque  $v'$  est lisse. Par la propriété universelle du produit fibré,  $g_s$  se factorise en

$$g_s : \mathrm{Spf} \mathcal{V}(s) \xrightarrow{\tilde{g}_s} \mathcal{U}(s) \xrightarrow{u'} \mathcal{S}$$

avec  $v' \circ \tilde{g}_s = \mathrm{Id}_{\mathrm{Spf} \mathcal{V}(s)}$  : comme  $v'$  est étale, on en déduit que  $\tilde{g}_s$  est une immersion à la fois ouverte et fermée. Ainsi  $g_s = u' \circ \tilde{g}_s$  est étale. Notons  $\overline{g}_s$  le morphisme composé

$$\overline{g}_s : \mathrm{Spf} \mathcal{V}(s) \xrightarrow{g_s} \mathcal{S} \hookrightarrow \mathcal{T};$$

$\overline{g}_s$  est étale et les foncteurs  $i_s^{\dagger*}$  et  $\hat{i}_s^*$  sont induits par  $\overline{g}_s^*$  [B 3, (2.3.6)].

**Théorème (3.4.7).** *On se place sous les hypothèses et notations de (3.4.6).*

(3.4.7.1) *Soit  $E \in \mathrm{Isoc}^\dagger((X, Y)/\mathcal{V})$ . Alors, pour tout entier  $i \geq 0$  et tout point fermé  $s$  de  $S$ , on a des isomorphismes*

$$\begin{aligned} i_s^{\dagger*} R^i \overline{f}_{\mathrm{rig}*}((X, Y)/\mathcal{T}; E) &\simeq R^i f_{s \mathrm{rig}*}(X_s/\mathcal{V}(s); E_{X_s}) \\ &\simeq R^i f_{s \mathrm{conv}*}(X_s/\mathcal{V}(s); \widehat{E_{X_s}}) \\ &\simeq H_{\mathrm{rig}}^i(X_s/K(s); E_{X_s}) \\ &= H_{\mathrm{conv}}^i(X_s/K(s); \widehat{E_{X_s}}) \end{aligned}$$

où l'isocrystal convergent  $\widehat{E_{X_s}} \in \mathrm{Isoc}(X_s/K(s)) = \mathrm{Isoc}^\dagger(X_s/K(s))$  coïncide avec l'isocrystal surconvergent  $E_{X_s} \in \mathrm{Isoc}^\dagger(X_s/K(s))$ .

(3.4.7.2) Supposons  $\rho : \mathcal{T} \rightarrow \mathrm{Spf} \mathcal{V}$  propre et soit  $E \in \mathrm{Isoc}^\dagger(X/K)$ . Alors, pour tout entier  $i \geq 0$  et tout point fermé  $s$  de  $S$ , on a des isomorphismes

$$\begin{aligned} i_s^* R^i f_{\mathrm{rig}*}(X/\mathcal{T}; E) &\simeq R^i f_{s \mathrm{ rig}*}(X_s/\mathcal{V}(s); E_{X_s}) \\ &\simeq R^i f_{s \mathrm{ conv}*}(X_s/\mathcal{V}(s); \widehat{E_{X_s}}) \\ &\simeq H_{\mathrm{rig}}^i(X_s/K(s); E_{X_s}) \\ &= H_{\mathrm{conv}}^i(X_s/K(s); \widehat{E_{X_s}}) \end{aligned}$$

où l'isocrystal convergent  $\widehat{E_{X_s}} \in \mathrm{Isoc}(X_s/K(s)) = \mathrm{Isoc}^\dagger(X_s/K(s))$  coïncide avec l'isocrystal surconvergent  $E_{X_s} \in \mathrm{Isoc}^\dagger(X_s/K(s))$ .

(3.4.7.3) Supposons que  $S = T$  et soit  $\mathcal{E} \in \mathrm{Isoc}(X/K)$ . Alors, pour tout entier  $i \geq 0$  et tout point fermé  $s$  de  $S$ , on a des isomorphismes

$$\begin{aligned} \hat{i}_s^* R^i f_{\mathrm{conv}*}(X/\mathcal{T}; \mathcal{E}) &\simeq R^i f_{s \mathrm{ conv}*}(X_s/\mathcal{V}(s); \mathcal{E}_{X_s}) \\ &= H_{\mathrm{conv}}^i(X_s/K(s); \mathcal{E}_{X_s}). \end{aligned}$$

*Démonstration.* Puisque  $\overline{g}_s$  est étale on peut donc appliquer le changement de base par  $(i_s, \overline{g}_s)$  et les corollaires (3.4.5.3) et (3.4.5.5).  $\square$

**3.4.8.** Soient  $S$  un  $k$ -schéma lisse et séparé et  $f : X \rightarrow S$  un  $k$ -morphisme projectif et lisse. Notons  $S = \bigcup_{\alpha} S_{\alpha,0}$  une décomposition de  $S$  en réunion d'ouverts connexes affines  $S_{\alpha,0} = \mathrm{Spec}(A_{\alpha,0})$ ,  $A_{\alpha} = \mathcal{V}[t_1, \dots, t_{d_{\alpha}}]/J_{\alpha}$  une  $\mathcal{V}$ -algèbre lisse relevant  $A_{\alpha,0}$  dont on a fixé une présentation et  $S_{\alpha} = \mathrm{Spec}(A_{\alpha})$ . On désigne par  $\overline{S}_{\alpha}$  l'adhérence schématique de  $S_{\alpha}$  dans  $\mathbb{P}_{\mathcal{V}}^{d_{\alpha}}$ , par  $\mathcal{S}_{\alpha}$  (resp  $\overline{\mathcal{S}}_{\alpha}$ ) le complété formel  $\mathfrak{m}$ -adique de  $S_{\alpha}$  (resp  $\overline{S}_{\alpha}$ ) et par

$$f_{\alpha} : X_{\alpha,0} = X \times_S S_{\alpha,0} \longrightarrow S_{\alpha,0}$$

la restriction de  $f$ . Quitte à décomposer  $X_{\alpha}$  en somme disjointe de ses composantes connexes on peut supposer  $X_{\alpha}$  connexe. D'après [I, (3.3.1)] il existe un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} X_{\alpha} & \hookrightarrow & \overline{X}_{\alpha} \\ h_{\alpha} \downarrow & & \downarrow \overline{h}_{\alpha} \\ S_{\alpha} & \hookrightarrow & \overline{S}_{\alpha} \end{array}$$

dans lequel  $\overline{h}_{\alpha}$  est projectif,  $h_{\alpha}$  est un relèvement projectif de  $f_{\alpha}$  et les flèches horizontales sont des immersions ouvertes. Le complété formel de ce carré est d'après [I, théo (3.3)] un carré cartésien de  $\mathcal{V}$ -schémas formels

$$(3.4.8.1) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{X}_{\alpha} & \hookrightarrow & \overline{\mathcal{X}}_{\alpha} \\ \hat{h}_{\alpha} \downarrow & & \downarrow \hat{\overline{h}}_{\alpha} \\ \mathcal{S}_{\alpha} & \hookrightarrow & \overline{\mathcal{S}}_{\alpha} \end{array}$$

dans lequel  $\hat{h}_\alpha$  est projectif,  $\hat{h}_\alpha$  est un relèvement projectif de la restriction  $f_\alpha$  de  $f$  et les flèches horizontales sont des immersions ouvertes.

**Théorème (3.4.8.2).** *Sous les hypothèses (3.4.8) supposons que, pour tout  $\alpha$ ,  $X_\alpha$  est plat sur  $\mathcal{V}$ . Alors, pour tout entier  $i \geq 0$ , on a un diagramme commutatif de foncteurs naturels induits par  $f$  et définis ci-après en (3.4.8.5)*

$$\begin{array}{ccc} \text{Isoc}^\dagger(X/K) & \xrightarrow{R^i f_{\text{rig}*}} & \text{Isoc}^\dagger(S/K) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Isoc}(X/K) & \xrightarrow{R^i f_{\text{conv}*}} & \text{Isoc}(X/K) \end{array}$$

où les flèches verticales sont les foncteurs d'oubli.

De plus ces foncteurs commutent à tout changement de base  $S' \rightarrow S$  entre  $k$ -schémas lisses et séparés; en particulier ils commutent aux passages aux fibres en les points fermés de  $S$ .

*Démonstration.* Puisque, pour tout  $\alpha$ ,  $X_\alpha$  est plat sur  $\mathcal{V}$ , le théorème [I, (3.3)] prouve que  $\hat{h}_\alpha$  est un relèvement projectif et lisse de la restriction  $f_\alpha$  de  $f$ . Soient  $E \in \text{Isoc}^\dagger(X/K)$  et  $E_\alpha$  sa restriction à  $X_\alpha$  : grâce à l'existence du carré cartésien (3.4.8.1) dans lequel  $\hat{h}_\alpha$  est un relèvement projectif et lisse de  $f_\alpha$  on conclut à l'aide du théorème (3.4.4) que

$$R^i f_{\alpha \text{rig}*}(X_{\alpha,0}/\overline{\mathcal{S}}_\alpha; E_\alpha) \in \text{Isoc}^\dagger(S_{\alpha,0}/K).$$

Montrons que celui-ci ne dépend que de  $S_{\alpha,0}$  et non de  $\overline{\mathcal{S}}_\alpha$ .

Supposons donnés un  $k$ -schéma propre  $\overline{\mathcal{S}}'_{\alpha,0}$ , un  $\mathcal{V}$ -schéma formel propre  $\overline{\mathcal{S}}'_\alpha$ , une immersion ouverte dominante  $j'_{\alpha,0} : S_{\alpha,0} \hookrightarrow \overline{\mathcal{S}}'_{\alpha,0}$  et une immersion fermée  $i'_{\alpha,0} : \overline{\mathcal{S}}'_{\alpha,0} \hookrightarrow \overline{\mathcal{S}}'_\alpha$  tels que le morphisme  $\overline{\mathcal{S}}'_\alpha \rightarrow \text{Spf } \mathcal{V}$  soit lisse sur un voisinage de  $S_{\alpha,0}$  dans  $\overline{\mathcal{S}}'_\alpha$ . Notons  $\overline{T}_{\alpha,0}$  l'adhérence schématique de  $S_{\alpha,0}$  plongé diagonalement dans  $\overline{\mathcal{S}}''_\alpha = \overline{\mathcal{S}}_{\alpha,0} \times_k \overline{\mathcal{S}}'_{\alpha,0}$  et  $\overline{\mathcal{S}}''_\alpha = \overline{\mathcal{S}}_\alpha \hat{\times}_{\mathcal{V}} \overline{\mathcal{S}}'_\alpha$ . On a un diagramme commutatif

$$(3.4.8.3) \quad \begin{array}{ccccc} S_{\alpha,0} & \xhookrightarrow{j_T} & \overline{T}_{\alpha,0} & \xhookrightarrow{i_T} & \overline{\mathcal{S}}''_\alpha \\ \text{id} \downarrow & & \downarrow p_\alpha & & \downarrow \overline{p}_{1,\alpha} \\ S_{\alpha,0} & \xhookrightarrow{j_S} & \overline{\mathcal{S}}_{\alpha,0} & \xhookrightarrow{i_S} & \overline{\mathcal{S}} \end{array}$$

dans lequel les flèches verticales sont induites par la première projection, les  $i$  (resp les  $j$ ) sont des immersions fermées (resp ouvertes). Comme  $p_\alpha$  est



propre, le foncteur  $(p_\alpha, \bar{p}_{1,\alpha})^*$  est une équivalence de catégorie [B 3, (2.3.5)] de la catégorie des isocristaux sur  $S_{\alpha,0}/K$  surconvergentes le long de  $Z_{\alpha,0} = \bar{S}_{\alpha,0} \setminus S_{\alpha,0}$  dans la catégorie des isocristaux sur  $S_{\alpha,0}/K$  surconvergentes le long de  $Z''_{\alpha,0} = \bar{T}_{\alpha,0} \setminus S_{\alpha,0}$ . De plus  $\bar{p}_{1,\alpha}$  est propre, et lisse sur un voisinage de  $S_{\alpha,0}$  dans  $\bar{\mathcal{S}}''_\alpha$ , donc par le théorème (3.4.4) on a isomorphisme de changement de base

$$\bar{p}_{1\alpha}^* R^i f_{\text{arig}*}(X_{\alpha,0}/\bar{\mathcal{S}}_\alpha; E_\alpha) \xrightarrow{\sim} R^i f_{\text{arig}*}(X_{\alpha,0}/\bar{\mathcal{S}}''_\alpha; E_\alpha),$$

et de même

$$\bar{p}_{2\alpha}^* R^i f_{\text{arig}*}(X_{\alpha,0}/\bar{\mathcal{S}}'_\alpha; E_\alpha) \xrightarrow{\sim} R^i f_{\text{arig}*}(X_{\alpha,0}/\bar{\mathcal{S}}''_\alpha; E_\alpha),$$

d'où un isomorphisme canonique

$$(3.4.8.4) \quad R^i f_{\text{arig}*}(X_{\alpha,0}/\bar{\mathcal{S}}_\alpha; E_\alpha) \xrightarrow{\sim} R^i f_{\text{arig}*}(X_{\alpha,0}/\bar{\mathcal{S}}'_\alpha; E_\alpha).$$

Ainsi  $R^i f_{\text{arig}*}(X_{\alpha,0}/\bar{\mathcal{S}}_\alpha; E_\alpha)$  ne dépend que de  $S_{\alpha,0}$ ; de plus sur  $S_{\alpha,0} \cap S_{\beta,0}$  ces isocristaux se recollent car on a des isomorphismes analogues à (3.4.8.4) et vérifiant la condition de cocycles. Ces données qui se recollent fournissent un isocristal surconvergent sur  $S/K$  [B 3, (2.3.2)] noté

$$(3.4.8.5) \quad R^i f_{\text{rig}*}(E),$$

et c'est le seul possible d'après le théorème de pleine fidélité de Kedlaya [Ked 3, Theo 5.2.1].

On raisonne de manière analogue pour  $R^i f_{\text{conv}*}(E)$  et le carré du théorème est clairement commutatif.

L'assertion sur les changements de base  $S' \rightarrow S$  résulte de (3.4.4.2).  $\square$

**Corollaire (3.4.8.6).** *Sous les hypothèses (3.4.8), supposons que  $f$  définit  $X$  comme une intersection complète relativement à  $S$  dans un espace projectif sur  $S$  [I, (3.3.6)]. Alors les conclusions du théorème (3.4.8.2) demeurent valides.*

*Démonstration.* Avec les notations de [I, (3.3.6.2)], chaque  $f_{\alpha,\beta} : X_{\alpha,\beta} \rightarrow S_{\alpha,\beta}$  se relève d'après [I, (3.3.7)] en un morphisme projectif et lisse au-dessus de  $\mathcal{V}$  et donne lieu à un diagramme commutatif tel que (3.4.8.1) en remplaçant  $\mathcal{S}_\alpha$  par  $\mathcal{S}_{\alpha,\beta}$ , et on conclut comme pour (3.4.8.2).  $\square$

On a la variante suivante du théorème (3.4.8.2) :

**Théorème (3.4.9).** *Supposons que le théorème (3.4.8.2) est vrai pour tout morphisme projectif et lisse  $f : X \rightarrow S$  avec  $S$  un  $k$ -schéma affine et lisse*

(donc sans faire l'hypothèse  $X_\alpha$  plat sur  $\mathcal{V}$ ). Soient  $S$  un  $k$ -schéma lisse et séparé et  $f : X \rightarrow S$  un  $k$ -morphisme projectif et lisse. Alors, pour tout entier  $i \geq 0$ , on a un diagramme commutatif de foncteurs naturels induits par  $f$  et définis à la manière de (3.4.8.5)

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Isoc}^\dagger(X/K) & \xrightarrow{R^i f_{\mathrm{rig}*}} & \mathrm{Isoc}^\dagger(S/K) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Isoc}(X/K) & \xrightarrow{R^i f_{\mathrm{conv}*}} & \mathrm{Isoc}(S/K) \end{array}$$

où les flèches verticales sont les foncteurs d'oubli.

De plus ces foncteurs commutent à tout changement de base  $S' \rightarrow S$  entre  $k$ -schémas lisses et séparés; en particulier ils commutent aux passages aux fibres en les points fermés de  $S$ .

*Démonstration.* Il suffit de décomposer  $S$  en schémas affines et lisses sur  $k$  et d'opérer les recollements comme dans la preuve de (3.4.8.2).  $\square$



# III. $F$ -isocristaux convergents sur un schéma lisse et images directes

On conserve les notations du II (0).

## 1. $F$ -isocristaux convergents sur un schéma affine et lisse

### 1.1. Notations

Soient  $X = \text{Spec } A_0$  un  $k$ -schéma affine et lisse,  $\mathcal{A}$  une  $C(k)$ -algèbre lisse relevant  $A_0$  [El, théo 6] et  $A = \mathcal{A} \otimes_{C(k)} \mathcal{V}$ . Fixons une présentation

$$\mathcal{A} = C(k)[t_1, \dots, t_n] / (f_1, \dots, f_s);$$

soient  $P$  le complété formel de la fermeture projective de  $\mathcal{X} = \text{Spec } A$  dans  $\mathbb{P}_{\mathcal{V}}^n$ ,  $Y$  sa réduction sur  $k$ ,  $j : X \hookrightarrow Y$ . Alors  $]Y[_P = P_K$ ; de plus  $]X[_P$ , qui est l'intersection de  $\mathcal{X}_K^{an}$  avec la boule unité  $B(0, 1^+) \subset \mathbb{A}_K^n$ , est l'affinoïde

$$]X[_P = \text{Spm } (K\{t_1, \dots, t_n\} / (f_1, \dots, f_s)).$$

Notons  $\hat{\mathcal{A}}$  (resp.  $\hat{A}$ ) le séparé complété  $p$ -adique de  $\mathcal{A}$  (resp.  $A$ ),  $\mathcal{A}^\dagger \subset \hat{\mathcal{A}}$  (resp.  $A^\dagger \subset \hat{A}$ ) le complété faible de  $\mathcal{A}$  au-dessus de  $(C(k), (p))$  (resp. de  $A$  au-dessus de  $(\mathcal{V}, (\pi))$ ) [M-W, § 1], et posons  $A_K^\dagger = A^\dagger \otimes_{\mathcal{V}} K$ ,  $\hat{A}_K = \hat{A} \otimes_{\mathcal{V}} K$ . On a des isomorphismes

$$\hat{\mathcal{A}} \simeq C(k)\{t_1, \dots, t_n\} / (f_1, \dots, f_s),$$

$$\hat{A} \simeq \mathcal{V}\{t_1, \dots, t_n\} / (f_1, \dots, f_s) \simeq \hat{\mathcal{A}} \otimes_{C(k)} \mathcal{V},$$

$$\mathcal{A}^\dagger \simeq C(k)[t_1, \dots, t_n]^\dagger / (f_1, \dots, f_s),$$

$$A^\dagger \simeq \mathcal{V}[t_1, \dots, t_n]^\dagger / (f_1, \dots, f_s) \simeq \mathcal{A}^\dagger \otimes_{C(k)} \mathcal{V},$$

et aussi [B 3, (2.1.2.4)]

$$\Gamma(P_K, j^\dagger \mathcal{O}_{P_K}) \simeq \Gamma(\mathcal{X}_K^{an}, j^\dagger \mathcal{O}_{P_K}) \simeq A_K^\dagger,$$

$$\Gamma(\mathcal{O}_X, j^\dagger \mathcal{O}_{P_K}) \simeq \Gamma(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_{P_K}) = \Gamma(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X) \simeq \hat{A}_K.$$

On fixe un relèvement  $F_{A^\dagger} : \mathcal{A}^\dagger \rightarrow \mathcal{A}$  de l'élévation à la puissance  $p^a$ ,  $F_{A_0} : A_0 \rightarrow A_0$ , au-dessus de  $\sigma$  [vdP, cor 2.4.3] : on peut choisir un tel relèvement  $F_{A^\dagger}$  de manière compatible à une extension  $k \hookrightarrow k'$  du corps de base [Et 5, I, 1.2]. Posons  $F_{A^\dagger} = F_{A^\dagger} \otimes_{C(k)} \mathcal{V}$ ,  $F_{\hat{A}} = F_{A^\dagger} \otimes_{A^\dagger} \hat{A}$  ; d'où des morphismes  $F_{A_K^\dagger} : A_K^\dagger \rightarrow A_K^\dagger$ ,  $F_{\hat{A}_K} : \hat{A}_K \rightarrow \hat{A}_K$  au-dessus de  $\sigma : K \rightarrow K$ . De même pour  $\mathcal{V}'$  comme ci-dessus et  $A' := A \otimes_{\mathcal{V}} \mathcal{V}'$  il existe d'après [vdP, cor 2.4.3] un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} A'^\dagger & \xrightarrow{F_{A'^\dagger}} & A'^\dagger \\ \uparrow & & \uparrow \\ A^\dagger & \xrightarrow{F_{A^\dagger}} & A^\dagger \end{array}$$

au-dessus du carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{V}' & \xrightarrow{\sigma} & \mathcal{V}' \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{V} & \xrightarrow{\sigma} & \mathcal{V}. \end{array}$$

On désigne par  $\mathbf{F}^a\text{-Mod}(\mathbf{A}_K^\dagger)$  (resp.  $\mathbf{F}^a\text{-Modloc}(\mathbf{A}_K^\dagger)$  ; resp.  $\mathbf{F}^a\text{-Modlib}(\mathbf{A}_K^\dagger)$ ) la catégorie des  $A_K^\dagger$ -modules de type fini (resp.  $A_K^\dagger$ -modules projectifs de type fini ; resp.  $A_K^\dagger$ -modules libres de type fini)  $M$  munis d'un morphisme

$$\phi_M : F_{A_K^\dagger}^*(M) \rightarrow M$$

appelé morphisme de Frobenius. Par analogie avec Wan [W 2, def 2.8] [W 3, def 2.1] nous dirons que  $M$  est un **F<sup>a</sup>-module surconvergent** (resp. et **projectif** ; resp. et **libre**) sur  $A_K^\dagger$ . En considérant les mêmes définitions sur  $\hat{A}_K$  au lieu de  $A_K^\dagger$  on dira que  $\mathcal{M} \in \mathbf{F}^a\text{-Mod}(\hat{\mathbf{A}}_K)$  (resp.  $\mathcal{M} \in \mathbf{F}^a\text{-Modloc}(\hat{\mathbf{A}}_K)$  ; resp.  $\mathcal{M} \in \mathbf{F}^a\text{-Modlib}(\hat{\mathbf{A}}_K)$ ) muni de

$$\phi_{\mathcal{M}} : F_{\hat{A}_K}^* (\mathcal{M}) =: \mathcal{M}^\sigma \longrightarrow \mathcal{M}$$

est un **F<sup>a</sup>-module convergent** (resp. et **projectif** ; resp. et **libre**) sur  $\hat{A}_K$ .

Lorsque le Frobenius est un isomorphisme on dira que l'on a une **structure de Frobenius forte**. On a des notions analogues sur  $A^\dagger$  et  $\hat{A}$ , sans tensoriser par  $K$  : on utilisera alors les notations **F<sup>a</sup>-Mod**( $A^\dagger$ ), ... **F<sup>a</sup>-Modlib**( $\hat{A}$ ).

Soit  $\Omega_{A^\dagger}^1$  le module des  $\mathcal{V}$ -différentielles de  $A^\dagger$  au sens de Monsky-Washnitzer [M-W, theo 4.2]

$$\Omega_{A^\dagger}^1 := \Omega_{A^\dagger/\mathcal{V}}^1 / \bigcap_n \mathfrak{m}^n \Omega_{A^\dagger/\mathcal{V}}^1 ,$$

$$\Omega_{A_K^\dagger}^1 := \Omega_{A^\dagger}^1 \otimes_{\mathcal{V}} K , \quad \Omega_{\hat{A}}^1 := \widehat{\Omega_{\hat{A}/\mathcal{V}}^1} , \quad \Omega_{\hat{A}_K}^1 := \Omega_{\hat{A}}^1 \otimes_{\mathcal{V}} K .$$

Notons **F<sup>a</sup>-Conn<sup>†</sup>**( $A_K^\dagger$ ) (resp. **F<sup>a</sup>-Conn**( $\hat{A}_K$ )) la catégorie des  $A_K^\dagger$ -modules (resp.  $\hat{A}_K$ -modules) projectifs de type fini  $M$  (resp.  $\mathcal{M}$ ) à connexion intégrable

$$\nabla : M \longrightarrow M \otimes_{A_K^\dagger} \Omega_{A_K^\dagger}^1$$

$$(\text{resp. } \hat{\nabla} : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M} \otimes_{\hat{A}_K} \Omega_{\hat{A}_K}^1)$$

et munis d'un isomorphisme horizontal

$$\phi^\dagger : (F_{A_K^\dagger}^* (M), F_{A_K^\dagger}^* (\nabla)) =: (M^\sigma, \nabla^\sigma) \xrightarrow{\sim} (M, \nabla)$$

$$(\text{resp. } \hat{\phi} : (F_{\hat{A}_K}^* (\mathcal{M}), F_{\hat{A}_K}^* (\hat{\nabla})) =: (\mathcal{M}^\sigma, \hat{\nabla}^\sigma) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{M}, \hat{\nabla})).$$

On note **Conn<sup>†</sup>**( $A_K^\dagger$ ) (resp. **Conn**( $\hat{A}_K$ )) la catégorie des  $A_K^\dagger$ -modules (resp.  $\hat{A}_K$ -modules) projectifs de type fini  $M$  (resp.  $\mathcal{M}$ ) à connexion intégrable dont la série de Taylor converge sur un voisinage strict du tube de la diagonale dans  $\mathcal{X}_K^{\text{an}} \times \mathcal{X}_K^{\text{an}}$  (resp. dont la série de Taylor converge sur le tube de la diagonale dans  $\mathcal{X}_K^{\text{an}} \times \mathcal{X}_K^{\text{an}}$ ).

On utilisera un exposant  $(\ )^\circ$  pour spécifier les sous-catégories des objets unités (i.e. tels qu'en tout point géométrique les pentes du Frobenius sont nulles),  $F^a\text{-Mod}(A_K^\dagger)^\circ$ ,  $F^a\text{-Mod}(\hat{A}_K)^\circ$ ,  $F^a\text{-Conn}^\dagger(A_K^\dagger)^\circ$ ,  $F^a\text{-Conn}(\hat{A}_K)^\circ$ , ... ou la restriction de foncteurs aux objets unités.

On dispose de foncteurs naturels rendant commutatif le diagramme [Et 5, I, § 5]

$$\begin{array}{ccccc} F^a\text{-Isoc}^\dagger(X/K) & \xrightarrow{\Gamma^\dagger} & F^a\text{-Conn}^\dagger(A_K^\dagger) & \longrightarrow & F^a\text{-Modloc}(A_K^\dagger) \\ \downarrow \mathcal{F} & & \downarrow \mathcal{G} & & \downarrow \mathcal{H} \\ F^a\text{-Isoc}(X/K) & \xrightarrow{\hat{\Gamma}} & F^a\text{-Conn}(\hat{A}_K) & \longrightarrow & F^a\text{-Modloc}(\hat{A}_K), \end{array}$$

où  $\Gamma^\dagger := \Gamma(\mathcal{X}_K^{\text{an}}, -)$  est une équivalence de catégories [B 3, cor (2.5.8)],  $\hat{\Gamma} := \Gamma(\text{]X[}, -)$  est pleinement fidèle [O 2, 2.15, 2.23] et [Et 5, I, (5.2.2)] et le foncteur  $\mathcal{G}$  (resp.  $\mathcal{H}$ ) envoie un  $A_K^\dagger$ -module projectif de type fini  $M$  sur son séparé complété  $p$ -adique  $\mathcal{M} = M \otimes_{A_K^\dagger} \hat{A}_K$  :  $\mathcal{G}$  et  $\mathcal{H}$  sont fidèles [Bour, A II, § 5, n° 3, prop 7] et [Bour, AC I, § 3, n° 5, prop 9 c)].

La restriction  $\mathcal{F}^\circ$  de  $\mathcal{F}$  à  $F^a\text{-Isoc}^\dagger(X/K)^\circ$  est un foncteur pleinement fidèle [Et 5, théo 5]

$$\mathcal{F}^\circ : F^a\text{-Isoc}^\dagger(X/K)^\circ \longrightarrow F^a\text{-Isoc}(X/K)^\circ ;$$

comme  $\Gamma^{\dagger^\circ}$  est une équivalence de catégories et  $\hat{\Gamma}^\circ$  pleinement fidèle, le foncteur  $\mathcal{G}^\circ$  est pleinement fidèle.

Nous allons montrer en 1.2 ci-après que  $\hat{\Gamma}$  est en fait une équivalence de catégories.

## 1.2. Des équivalences de catégories

Avec les notations de 1.1 nous allons montrer que la donnée d'un  $F^a$ -isocristal convergent sur  $X$  équivaut à celle d'un  $\hat{A}_K$ -module projectif de type fini  $\mathcal{M}$ , muni d'une connexion intégrable

$$\nabla : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M} \otimes_{\hat{A}_K} \Omega_{\hat{A}_K}^1$$

et d'un isomorphisme horizontal

$$\phi : (\mathcal{M}^\sigma, \nabla^\sigma) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{M}, \nabla),$$

où  $(\mathcal{M}^\sigma, \nabla^\sigma)$  provient de  $(\mathcal{M}, \nabla)$  en étendant les scalaires par  $F_{\hat{A}_K}$ .

**Proposition (1.2.1).** *Avec les notations ci-dessus, le foncteur  $\Gamma(\text{]X[}, -)$  induit une équivalence entre*

- (i) *La catégorie des  $\mathcal{O}_{\text{]X[}}$ -modules cohérents (resp. et localement libres), et celles des  $\hat{A}_K$ -modules de type fini (resp. et projectifs) ;*

- (ii) La catégorie des  $\mathcal{O}_{]X[}$ -modules cohérents à connexion intégrable (resp. des isocristaux convergents sur  $X$ ), et celle des  $\hat{A}_K$ -modules projectifs de type fini munis d'une connexion intégrable (resp. et dont la série de Taylor converge sur  $]X[_{\mathcal{X}^2}$ ).

**Remarque.** Berthelot a fourni une description analogue pour les  $j^+ \mathcal{O}_{]X[-}$ -modules cohérents [B 3, (2.5.2)].

*Démonstration.* La démonstration est semblable à celle de loc. cit. Remarquons simplement que  $]X[$  étant affinoïde, la donnée d'un  $\mathcal{O}_{]X[}$ -module cohérent  $\mathcal{E}$  équivaut à celle du  $\hat{A}_K$ -module de type fini  $\mathcal{M} = \Gamma(]X[, \mathcal{E})$  [B-G-R, 9.4.2]. De même l'assertion “projectif” en (ii) résulte du fait que  $K$  est de caractéristique 0 [B 3, (2.2.3) (ii)] [P, 10.3.1].  $\square$

**Théorème (1.2.2).** Avec les notations de 1.1, soient  $\mathcal{M}$  un  $\hat{A}_K$ -module de type fini, muni d'une connexion intégrable  $\nabla$ , et  $(\mathcal{M}^\sigma, \nabla^\sigma)$  le module à connexion intégrable déduit de  $(\mathcal{M}, \nabla)$  par l'extension des scalaires  $F_{\hat{A}_K}$ . On suppose qu'il existe un isomorphisme horizontal

$$\phi : (\mathcal{M}^\sigma, \nabla^\sigma) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{M}, \nabla).$$

Alors, si  $(\mathcal{E}, \nabla)$  est le  $\mathcal{O}_{]X[}$ -module correspondant à  $(\mathcal{M}, \nabla)$  par l'équivalence de (1.2.1), la connexion  $\nabla$  de  $\mathcal{E}$  est convergente.

*Démonstration.* La preuve suit celle de [B 3, (2.5.7)]. Comme l'assertion est locale sur  $X$  [B 3, (2.2.11)] on peut supposer  $\Omega_X^1$  libre de base  $d\bar{z}_1, \dots, d\bar{z}_m$ . Si  $z_1, \dots, z_m \in A$  relèvent  $\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_m$ ,  $\Omega_{\hat{A}}^1$  est un  $\hat{A}$ -module libre de base  $dz_1, \dots, dz_m$ . Soient  $\partial_1, \dots, \partial_m$  les dérivations correspondantes, et  $e_1, \dots, e_r$  une base de  $\mathcal{M}$  ( $\mathcal{M}$  est nécessairement projectif d'après [P, lemme 10.3.1]). Pour tout  $i$  et tout  $k$ , posons  $\partial_i e_k = \sum_j b_{ijk} e_j$ , et soit  $B_i \in M_r(\hat{A}_K)$  la matrice des  $b_{i,j,k}$ ; la connexion  $\nabla$  est déterminée par les  $B_i$ . En utilisant l'isomorphisme horizontal  $\phi$ , on peut supposer, comme dans la preuve de [B 3, (2.5.7)] que les matrices  $B_i$  sont à coefficients dans  $\hat{A}$ .

Notons  $\eta_0 = |\pi|$ . Pour tout  $e \in \mathcal{M} = \Gamma(]X[, \mathcal{E})$ ,  $\underline{\partial}^{\underline{k}} e$  est à coefficients dans  $\hat{A}$ , donc  $\|\underline{\partial}^{\underline{k}} e\| \leq 1$ , et comme  $\eta_0 < p^{-(1/p-1)}$  on en déduit

$$(1.2.2.1) \quad \left\| \frac{1}{\underline{k}!} \underline{\partial}^{\underline{k}} e \right\| \eta_0^{|\underline{k}|} \longrightarrow 0 \text{ quand } |\underline{k}| \longrightarrow +\infty.$$

Posons  $\zeta_i = 1 \otimes z_i - z_i \otimes 1$ ,  $\tau_j = 1 \otimes t_j - t_j \otimes 1$ .



Pour  $\eta < 1$ , soient

$$U = \{x \in \mathcal{X}_K^{an} \times \mathcal{X}_K^{an} / \forall j, | (1 \otimes t_j(x)) | \leq 1, | (t_j \otimes 1)(x) | \leq 1\},$$

$$W_\eta = \{x \in \mathcal{X}_K^{an} \times \mathcal{X}_K^{an} / \forall j, | \tau_j(x) | \leq \eta\},$$

$$W'_\eta = \{x \in \mathcal{X}_K^{an} \times \mathcal{X}_K^{an} / \forall i, | \zeta_i(x) | \leq 1\},$$

et  $V_\eta = W_\eta \cap U$ . Pour toute suite croissante  $\underline{\eta}$  de limite 1, l'ouvert  $V_{\underline{\eta}} := \bigcup_n V_{\eta_n}$  est égal à  $]X[_{\mathcal{X}^2}$ , d'après l'exemple de [B 3, (1.3.10)]. Nous allons construire une suite  $\underline{\eta}$  telle qu'il existe sur l'ouvert  $V_{\underline{\eta}} = ]X[_{\mathcal{X}^2}$  un isomorphisme  $\epsilon : p_2^* \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} p_1^* \mathcal{E}$  induisant sur les voisinages infinitésimaux de la diagonale les isomorphismes  $\epsilon_n$  définis par  $\nabla$ .

Puisque les  $t_j$  engendrent  $A$ , il existe des relations  $\zeta_i = \sum_j \beta_{ij} \tau_j$ , avec  $\beta_{ij} \in A \otimes_V A$ ; d'où  $\| \zeta_i \| \leq \sup_j \| \tau_j \|$ , la norme étant la norme spectrale sur  $U$ . Par suite on a  $V_{\eta_0} \subset W'_{\eta_0} \cap U$ . On procède alors comme dans la démonstration de [B 3, (2.2.13)] pour définir sur  $V_{\eta_0}$  un isomorphisme  $\epsilon : p_2^* \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} p_1^* \mathcal{E}$  induisant sur les voisinages infinitésimaux de la diagonale les isomorphismes  $\epsilon_n$  définis par  $\nabla$ , en posant

$$\epsilon(p_2^*(e)) = \sum_{\underline{k}} \frac{1}{\underline{k}!} \underline{\partial}^{\underline{k}} e \otimes \underline{\zeta}^{\underline{k}},$$

la série convergeant dans  $\Gamma(V_{\eta_0}, p_1^*(\mathcal{E}))$  grâce à (1.2.2.1). On va utiliser ensuite l'action de Frobenius pour prolonger l'isomorphisme  $\epsilon$  de  $V_{\eta_0}$  à  $V_{\underline{\eta}}$ , pour une suite  $\underline{\eta}$  convenable : tout d'abord, on peut supposer d'après (1.2.1) qu'il existe un morphisme  $F_K : ]X[ = \mathrm{Spm}(\hat{A}_K) \longrightarrow ]X[$  tel que l'homomorphisme  $\Gamma(]X[, \mathcal{O}_{]X[}) \longrightarrow \Gamma(]X[, \mathcal{O}_{]X[})$  induit par  $F_K$  soit égal à  $F_{\hat{A}_K} \otimes \sigma$ . Le Frobenius  $\phi$  de  $\mathcal{E}$  est alors défini par un isomorphisme  $\phi : F_K^* \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}$  sur  $]X[$ , ce qui fournit des isomorphismes

$$\phi_i = p_i^*(\phi) : (F_K \times F_K)^* (p_i^* \mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} p_i^* \mathcal{E} \text{ sur } V_{\eta_0}.$$

On définit une suite croissante  $\underline{\eta}$  de limite 1 en posant

$$\eta_{n+1} = \eta_n^{1/p^a}.$$

Montrons que  $(F_K \times F_K)(V_{\eta_{n+1}}) \subset V_{\eta_n}$ . Posons

$$F_{\hat{A}}(t_j) = t_j^{p^a} + \pi a_j,$$

avec  $a_j \in \hat{A}$ . Pour  $x \in U$  on a

$$\begin{aligned} |(t_j \otimes 1)((F_K \times F_K)(x))| &= |(F_{\hat{A}}(t_j) \otimes 1)(x)| \\ &= |((t_j^{p^a} + \pi a_j) \otimes 1)(x)| \leq 1, \end{aligned}$$

de même pour  $1 \otimes t_j$ , de sorte que  $(F_K \times F_K)(x) \in U$ . D'autre part, si  $J = \text{Ker}(A \otimes_{\mathcal{V}} A \rightarrow A)$ , on a dans  $(A \otimes_{\mathcal{V}} A)^\wedge$  la relation

$$\begin{aligned} (F_{\hat{A}} \times F_{\hat{A}})(\tau_j) &= 1 \otimes (t_j^{p^a} + \pi a_j) - (t_j^{p^a} + \pi a_j) \otimes 1 \\ &= \tau_j^{p^a} + \pi \alpha_j, \end{aligned}$$

avec  $\alpha_j \in J(A \otimes_{\mathcal{V}} A)^\wedge$ . Dans  $(A \otimes_{\mathcal{V}} A)^\wedge$  on peut écrire  $\alpha_j$  sous la forme  $\alpha_j = \sum_i \gamma_{ij} \tau_i$ , avec  $\|\gamma_{ij}\| \leq 1$ . Alors, pour  $x \in V_{\eta_{n+1}}$ , on obtient

$$|\pi \alpha_j(x)| \leq |\pi| \eta_{n+1} \leq \eta_n$$

et

$$|\tau_j^{p^a}(x)| \leq \eta_{n+1}^{p^a} = \eta_n.$$

Par conséquent on a bien

$$(F_K \times F_K)(V_{\eta_{n+1}}) \subset V_{\eta_n}.$$

Supposons construit sur  $V_n := \bigcup_{i \leq n} V_{\eta_i}$  un isomorphisme  $\epsilon^{(n)} : p_2^* \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} p_1^* \mathcal{E}$ ; on conclut alors comme dans la preuve de [B 3, (2.5.7)] à l'existence d'un isomorphisme sur  $V = \bigcup_i V_{\eta_i} = ]X[_{\chi^2}$ , d'où la convergence de  $\nabla$ .  $\square$

**Corollaire (1.2.3).** *Soient  $X = \text{Spec } A_0$  un  $k$ -schéma affine et lisse,  $A$  une  $\mathcal{V}$ -algèbre lisse relevant  $A_0$ ,  $\hat{A}$  le séparé complété  $p$ -adique de  $A$ ,  $F_{\hat{A}} : \hat{A} \rightarrow \hat{A}$  un relèvement de la puissance  $a^{\text{ième}}$  de l'endomorphisme de Frobenius de  $A_0$  au-dessus de  $\sigma$ . Alors la catégorie des  $F^a$ -isocristaux convergents sur  $X$  est équivalente à la catégorie des  $\hat{A}_K$ -modules (nécessairement projectifs) de type fini  $\mathcal{M}$ , munis d'une connexion intégrable  $\nabla$  et d'un isomorphisme horizontal  $\phi : (\mathcal{M}^\sigma, \nabla^\sigma) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{M}, \nabla)$ .*

*Démonstration.* D'après la proposition (1.2.1) la catégorie des isocristaux convergents sur  $X$  est équivalente à celle des  $\hat{A}_K$ -modules projectifs de type fini, munis d'une connexion convergente  $\nabla$ . De plus cette équivalence est fonctorielle par rapport à  $\hat{A}$  par des arguments analogues à [B 3, (2.5.6)]. On

conclut par le théorème (1.2.2).  $\square$

## 2. $F$ -isocristaux convergents sur un schéma lisse formellement relevable

Nous allons généraliser au cas relevable l'équivalence de catégories du corollaire (1.2.3) précédent.

### 2.1. Espaces rigides associés aux schémas formels

Dans ce § 2 on se donne  $f : X \rightarrow \operatorname{Spec} k$  un  $k$ -schéma lisse tel qu'il existe un  $\mathcal{V}$ -schéma formel lisse  $h : \mathcal{X} \rightarrow \operatorname{Spf} \mathcal{V}$  relevant  $f$ . Par une construction de Raynaud on sait associer à  $\mathcal{X}$  (resp. à  $h$ ) un espace rigide analytique noté  $\mathcal{X}_K$  [Bo-Lü 1 et 2] [B 3] (resp. un morphisme  $h_K : \mathcal{X}_K \rightarrow \operatorname{Spm} K$ ). Si  $h$  est propre alors  $h_K$  est propre [Lü]. L'espace  $\mathcal{X}_K$  est muni d'une topologie de Grothendieck [B 3, (0.1.2), (0.2)] et d'un faisceau d'anneaux  $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_K}$  : nous dirons que  $(\mathcal{X}_K, \mathcal{O}_{\mathcal{X}_K})$  est un  $G$ -espace annulé [B-G-R, 9.3.1].

**Proposition (2.1.1).** *Sous les hypothèses 2.1 il existe un  $\mathcal{V}$ -schéma formel lisse  $h' : \mathcal{X}' \rightarrow \operatorname{Spf} \mathcal{V}$ , un  $\mathcal{V}$ -isomorphisme  $\mathcal{X}' \xrightarrow{\sim} \mathcal{X}$  et des recouvrements par des ouverts lisses  $\mathcal{X}' = \bigcup_{\alpha} \operatorname{Spf} \hat{A}_{\alpha}$ ,  $X = \bigcup_{\alpha} \operatorname{Spec} A_{\alpha,0}$ , où les  $A_{\alpha}$  sont des  $\mathcal{V}$ -algèbres lisses et  $A_{\alpha,0} := A_{\alpha}/\pi A_{\alpha}$ .*

*Démonstration.* Dire que  $\mathcal{X}$  est un  $\mathcal{V}$ -schéma formel lisse signifie qu'il existe un recouvrement  $\mathcal{X} = \bigcup_{\alpha} \operatorname{Spf} \mathcal{B}_{\alpha}$ , où les  $\mathcal{B}_{\alpha}$  sont des  $\mathcal{V}$ -algèbres plates séparées et complètes pour la topologie  $\pi$ -adique et formellement lisses pour les topologies discrètes sur  $\mathcal{V}$  et  $\mathcal{B}_{\alpha}$  : les  $\mathcal{B}_{\alpha}$  sont donc des  $\mathcal{V}$ -algèbres formellement lisses pour les topologies  $\pi$ -adiques sur  $\mathcal{V}$  et  $\mathcal{B}_{\alpha}$  [EGA O<sub>IV</sub>, (19.3.1)]. Pour tout  $\alpha$  notons  $A_{\alpha,0} := \mathcal{B}_{\alpha} / \pi \mathcal{B}_{\alpha}$ , et  $A_{\alpha}$  une  $\mathcal{V}$ -algèbre lisse relevant  $A_{\alpha,0}$  [El, théo 6] : d'après [Et 4, cor 1 du théo 4] il existe, pour tout  $\alpha$ , un  $\mathcal{V}$ -isomorphisme

$$\hat{A}_{\alpha} \xleftarrow{\sim} \mathcal{B}_{\alpha}, \text{ où } \hat{A}_{\alpha} := \varprojlim_n A_{\alpha} / \pi^n A_{\alpha}.$$

Désignons par

$$P_{\alpha} = \operatorname{Spf} \mathcal{B}_{\alpha}, \quad P'_{\alpha} = \operatorname{Spf} \hat{A}_{\alpha}, \quad P'_{\alpha\beta} := P'_{\alpha} \times_{P_{\alpha}} (P_{\alpha} \cap P_{\beta}),$$

$\psi_\alpha$  le  $\mathcal{V}$ -isomorphisme  $\psi_\alpha : P'_\alpha \xrightarrow{\sim} P_\alpha$ , et  $\psi_{\alpha\beta}$  le  $\mathcal{V}$ -isomorphisme

$$P'_{\alpha\beta} \xrightarrow{\sim} P_\alpha \cap P_\beta$$

déduit de  $\psi_\alpha$  par le changement de base  $P_\alpha \cap P_\beta \hookrightarrow P_\alpha$ . Le  $\mathcal{V}$ -isomorphisme

$$\varphi_{\alpha\beta} := \psi_{\beta\alpha}^{-1} \circ \psi_{\alpha\beta} : P'_{\alpha\beta} \xrightarrow{\sim} P'_{\beta\alpha}$$

induit des  $\mathcal{V}$ -isomorphismes

$$\varphi_{\alpha\beta\gamma} : P'_{\alpha\beta} \cap P'_{\alpha\gamma} \xrightarrow{\sim} P'_{\beta\alpha} \cap P'_{\beta\gamma}$$

et on a les identités

$$\varphi_{\alpha\beta} \circ \varphi_{\beta\alpha} = Id, \quad \varphi_{\alpha\alpha} = Id,$$

$$\varphi_{\alpha\beta\gamma} = \varphi_{\gamma\beta\alpha} \circ \varphi_{\alpha\gamma\beta},$$

grâce au fait que les  $P_\alpha$  se recollent pour former  $\mathcal{X}$ . Par conséquent on peut recoller les  $P'_\alpha$  le long des  $P'_{\alpha\beta}$  : le schéma formel ainsi obtenu est le schéma formel  $\mathcal{X}'$  cherché.  $\square$

**Corollaire (2.1.2).** *Sous les hypothèses 2.1 le morphisme d'espaces rigides  $h_K : \mathcal{X}_K \rightarrow \text{Spm } K$  est lisse.*

*Démonstration.* Compte-tenu de l'isomorphisme  $\mathcal{X}' \xrightarrow{\sim} \mathcal{X}$  de (2.1.1) il suffit d'appliquer le critère jacobien [B 3, (0.1.11)].  $\square$

**Corollaire (2.1.3).** *Soient  $S$  un  $k$ -schéma lisse et  $f : X \rightarrow S$  un  $k$ -morphisme lisse et supposons donnés un  $\mathcal{V}$ -schéma formel lisse  $\mathcal{S}$  et un  $\mathcal{V}$ -morphisme lisse  $h : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{S}$  de schémas formels relevant  $f$ . Alors*

- (i) *Il existe un  $\mathcal{V}$ -schéma formel lisse  $\mathcal{S}' = \bigcup_\alpha \mathcal{S}'_\alpha$ ,  $\mathcal{S}'_\alpha = \text{Spf } \hat{A}_\alpha$  où les  $A_\alpha$  sont des  $\mathcal{V}$ -algèbres lisses et un  $\mathcal{V}$ -isomorphisme  $\mathcal{S}' \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}$ .*
- (ii) *Si l'on pose  $\mathcal{X}' := \mathcal{X} \times_{\mathcal{S}} \mathcal{S}'$ ,  $\mathcal{X}'_\alpha := \mathcal{X}' \times_{\mathcal{S}} \mathcal{S}'_\alpha$ , il existe de plus un  $\mathcal{S}'$ -schéma formel lisse  $\mathcal{X}''$  et un  $\mathcal{S}'$ -isomorphisme  $\mathcal{X}'' \xrightarrow{\sim} \mathcal{X}'$  tel que*

$$\mathcal{X}'' = \bigcup_\alpha \mathcal{X}''_\alpha, \text{ où } \mathcal{X}''_\alpha = \bigcup_\beta \mathcal{X}''_{\alpha,\beta} = \bigcup_\beta \text{Spf } \hat{B}_{\alpha,\beta},$$

*les  $B_{\alpha,\beta}$  étant des  $\hat{A}_\alpha$ -algèbres lisses (resp. des  $A_\alpha^\dagger$ -algèbres lisses)*

- (iii) *Avec les notations du (ii) il existe aussi un  $\mathcal{V}$ -schéma formel lisse  $\mathcal{X}'''$  et un  $\mathcal{V}$ -isomorphisme  $\mathcal{X}''' \xrightarrow{\sim} \mathcal{X}''$  tel que*

$$\mathcal{X}''' = \bigcup_{\alpha} \mathcal{X}_{\alpha}''' , \text{ où } \mathcal{X}_{\alpha}''' = \bigcup_{\beta} \operatorname{Spf} \hat{C}_{\alpha,\beta}$$

et  $C_{\alpha,\beta}$  est une  $\mathcal{V}$ -algèbre lisse munie d'un  $\mathcal{V}$ -isomorphisme

$$\hat{B}_{\alpha,\beta} \simeq \hat{C}_{\alpha,\beta}.$$

*Démonstration.* La proposition (2.1.1.) fournit le (i).

Pour (ii) et (iii) on utilise encore [Et 4, théo 4 et son cor 1] : on peut recoller les  $\mathcal{X}_{\alpha,\beta}''$  (resp. les  $\mathcal{X}_{\alpha}''$ , resp. les  $\mathcal{X}_{\alpha}'''$ ) grâce à l'existence globale de  $\mathcal{X}_{\alpha}'$  (resp. de  $\mathcal{X}'$ , resp. de  $\mathcal{X}''$ ).  $\square$

**Corollaire (2.1.4).** *Sous les hypothèses (2.1.3) le morphisme d'espaces rigides  $h_K : \mathcal{X}_K \rightarrow \mathcal{S}_K$  est lisse. Si de plus  $h$  est propre alors  $h_K$  est propre.*

*Démonstration.* La lissité de  $h_K$  résulte de (2.1.3) (ii) et du critère jacobien [B 3, (0.1.11)].

La définition d'un morphisme propre d'espaces rigides est donnée dans [Lü, 2.4] : la propriété de  $h$  entraîne celle de  $h_K$  [Lü, theo 3.1].  $\square$

## 2.2. F-isocristaux convergents et $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_K}$ -modules

Rappelons que les hypothèses (2.1) sont satisfaites.

La donnée de  $\mathcal{E} \in \operatorname{Isoc}(X/K)$  équivaut à celle d'un  $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_K}$ -module localement libre de type fini  $\mathcal{E}_{\mathcal{X}}$  [B 3, (2.3.2), (2.2.3) (ii)] muni d'une connexion  $\nabla$  relativement à  $K$ , intégrable et convergente. D'après (2.1.1) on a un  $\mathcal{V}$ -isomorphisme  $\mathcal{X} \simeq \bigcup_{\alpha} \operatorname{Spf} \hat{A}_{\alpha} =: \bigcup_{\alpha} \mathcal{X}_{\alpha}$  où les  $A_{\alpha}$  sont des  $\mathcal{V}$ -algèbres lisses ; si  $F_{\alpha_1}, F_{\alpha_2} : \mathcal{X}_{\alpha} \rightarrow \mathcal{X}_{\alpha}$  sont deux relèvements de la puissance  $a^{\text{ième}}$  du Frobenius absolu de  $X_{\alpha} = \mathcal{X}_{\alpha} \bmod \pi$ , alors on a un isomorphisme canonique [B 3, (2.2.17)]

$$F_{\alpha_1}^*(\mathcal{E}_{\mathcal{X}_{\alpha}}) \xrightarrow{\sim} F_{\alpha_2}^*(\mathcal{E}_{\mathcal{X}_{\alpha}}) ,$$

où  $(\mathcal{E}_{\mathcal{X}_{\alpha}}, \nabla_{\alpha})$  est la restriction de  $(\mathcal{E}_{\mathcal{X}}, \nabla)$  à  $\mathcal{X}_{\alpha K} = \operatorname{Spm}(\hat{A}_{\alpha K})$ .

Supposons fixé pour chaque  $\alpha$  un relèvement  $F_{\alpha} : \mathcal{X}_{\alpha} \rightarrow \mathcal{X}_{\alpha}$ , de la puissance  $a^{\text{ième}}$  du Frobenius absolu de  $X_{\alpha} = \mathcal{X}_{\alpha} \bmod \pi$ , et soit  $\mathcal{E} \in F^a\text{-Isoc}(X/K)$ . La structure de Frobenius sur  $\mathcal{E}$  fournit pour tout  $\alpha$  un isomorphisme [cor (1.2.3)]

$$\phi_\alpha : (F_\alpha^*(\mathcal{E}_{\mathcal{X}_\alpha}), F_\alpha^*(\nabla_\alpha)) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{E}_{\mathcal{X}_\alpha}, \nabla_\alpha),$$

avec compatibilités évidentes quand  $\alpha$  varie : d'après (1.2.3) la connaissance de  $\mathcal{E}_{\mathcal{X}_\alpha}$  équivaut à celle de  $\Gamma(\mathcal{X}_{\alpha K}, \mathcal{E}_{\mathcal{X}_\alpha})$  avec mêmes données.

Notons **F<sup>a</sup>-Conn**( $\mathcal{X}_K$ ) la catégorie des  $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_K}$ -modules localement libres de type fini  $\mathcal{M}$  munis d'une connexion  $\nabla$  relativement à  $K$ , intégrable et d'une famille compatible d'isomorphismes

$$\phi_\alpha : (F_\alpha^*(\mathcal{M}_\alpha), F_\alpha^*(\nabla_\alpha)) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{M}_\alpha, \nabla_\alpha) := (\mathcal{M}, \nabla)|_{\mathcal{X}_{\alpha K}}.$$

**Théorème (2.2.1).** *Avec les notations de (2.2) la flèche naturelle*

$$F^a\text{-Isoc}(X/K) \longrightarrow F^a\text{-Conn}(\mathcal{X}_K)$$

$$\mathcal{E} \longmapsto \mathcal{E}_{\mathcal{X}}$$

*est une équivalence de catégories.*

*Démonstration.* Nous venons de montrer que si  $\mathcal{E} \in F^a\text{-Isoc}(X/K)$  alors  $\mathcal{E}_{\mathcal{X}} \in F^a\text{-Conn}(\mathcal{X}_K)$ .

Réciproquement soit  $\mathcal{M} \in F^a\text{-Conn}(\mathcal{X}_K)$ ; puisque  $\mathcal{M}$  est localement libre de type fini et que  $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_K}$  est cohérent [B 3, (2.1.9)], alors  $\mathcal{M}$  est un  $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_K}$ -module cohérent. D'après (1.2.3) l'existence des isomorphismes horizontaux

$$\phi_\alpha : (F_\alpha^*(\mathcal{M}_\alpha), F_\alpha^*(\nabla_\alpha)) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{M}_\alpha, \nabla_\alpha)$$

prouve que la connexion est convergente, car la donnée de  $(\mathcal{M}_\alpha, \nabla_\alpha, \phi_\alpha)$  équivaut à celle d'un élément de  $F^a\text{-Isoc}(X_\alpha/K)$  : puisque ces données se recollent la connexion  $\nabla$  est convergente [B 3, (2.2.11)], d'où un élément  $\mathcal{E}$  de  $\text{Isoc}(X/K)$  [B 3, (2.3.2)] tel que  $\mathcal{E}_{\mathcal{X}} = \mathcal{M}$ . Enfin les  $\phi_\alpha$  définissent un isomorphisme de  $\text{Isoc}(X/K)$

$$\phi_{\mathcal{E}} : F_\sigma^* \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}$$

qui est le Frobenius de  $\mathcal{E}$  [B 3, (2.3.7)] et  $(\phi_{\mathcal{E}})_{\mathcal{X}} = \phi_{\mathcal{M}}$ .  $\square$

Rappelons que pour  $\mathcal{E} \in \text{Isoc}(X/K)$  la cohomologie convergente de Ogus [O 3] et [B 5, (3.1.11) (i), (3.1.12) (ii)] est donnée par

$$(2.2.2) \quad H_{conv}^i(X/K, \mathcal{E}) = \mathbb{H}^i(\mathcal{X}_K, \mathcal{E}_{\mathcal{X}} \otimes \Omega_{\mathcal{X}_K/K}^\bullet).$$

### 3. Images directes de $F$ -isocristaux convergents

Dans le cas d'une famille propre et lisse nous allons étendre ici le théorème 7.9 de Ogus [O 3] établissant la finitude de la cohomologie convergente  $H_{conv}^i(X/K, \mathcal{E})$  pour  $X$  propre et lisse sur  $k$  et  $\mathcal{E}$  un  $F$ -isocristal convergent.

Sauf mention du contraire, on suppose dans ce paragraphe 3 que  $k$  est un corps parfait de caractéristique  $p > 0$ ,  $q = p^a$ ,  $\mathcal{V}$  est un anneau de valuation discrète complet, d'idéal maximal  $\mathfrak{m}$  et corps résiduel  $k$ . On suppose le corps des fractions  $K$  de  $\mathcal{V}$  de caractéristique 0, on fixe une uniformisante  $\pi$  et on note  $e$  l'indice de ramification : on suppose, sauf mention expresse du contraire, que  $e \leq p - 1$ .

On relève la puissance  $q$  sur  $k$  en un automorphisme  $\sigma$  de  $\mathcal{V}$ , tel que  $\sigma(\pi) = \pi$ , suivant la méthode [Et 5, I 1.1] : on note encore  $\sigma$  son extension à  $K$  et ce  $\sigma$  est un automorphisme de  $K$  puisque  $k$  est parfait [II,0].

#### 3.1. Relèvement de Teichmüller

Soit  $X = \text{Spec } A_0$  un  $k$ -schéma lisse. Pour  $x \in |X| = \{\text{points fermés de } X\}$ , soit  $i_x = \text{Spec } k(x) \hookrightarrow X$  l'immersion fermée canonique :  $k(x) = A_0/\mathfrak{m}_x$  est une extension finie étale de  $k$  de degré  $\deg x = [k(x) : k]$ . Notons  $W = W(k)$  (resp.  $W(x) = W(k(x))$ ) l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans  $k$  (resp.  $k(x)$ ),

$$\mathcal{V}(x) = W(x) \otimes_W \mathcal{V} \simeq W(x)[\pi] ,$$

$K_0 = \text{Frac } W$ ,  $K_0(x) = \text{Frac}(W(x))$ ,  $K(x) = \text{Frac}(\mathcal{V}(x))$ ,  $\sigma_x$  la puissance  $p^a$  sur  $k(x)$ ,  $\sigma_{W(x)} = W(\sigma_x)$  le relèvement canonique de  $\sigma_x$  à  $W(x)$ ,  $\sigma_{\mathcal{V}(x)} = \sigma_{W(x)} \otimes_W \mathcal{V}$  et  $\sigma_{K(x)}$  (resp.  $\sigma_{K_0(x)}$ ) son extension naturelle à  $K(x)$  (resp.  $K_0(x)$ ) définie par  $\sigma_{K(x)}(u/v) = \sigma_{\mathcal{V}(x)}(u)/\sigma_{\mathcal{V}(x)}(v)$  (resp.  $\sigma_{K_0(x)}(u/v) = \sigma_{W(x)}(u)/\sigma_{W(x)}(v)$ ). Le morphisme  $\sigma_{K(x)}$  coïncide, d'après [Et 5, I.1.1] et [B-M 2, (1.2.7) (ii)], avec le morphisme  $\sigma' : K' \rightarrow K'$  (au-dessus de  $\sigma : K \rightarrow K$ ) de [Et 5, I.1.1] pour  $k' = k(x)$ .

Soit  $A$  une  $\mathcal{V}$ -algèbre lisse relevant  $A_0$  et fixons une présentation  $A = \mathcal{V}[t_1, \dots, t_n]/(f_1, \dots, f_m)$ . On désigne par  $\hat{A}$  ((resp.  $A^\dagger$ ) le séparé complété (resp. le complété faible)  $\mathfrak{m}$ -adique de  $A$ . Soient  $P$  le complété formel de la fermeture projective de  $\mathcal{X} = \text{Spec } A$  dans  $\mathbb{P}_{\mathcal{V}}^n$ ,  $P_1 = \text{Spf}(\mathcal{V}(x))$ ,  $X_1 = \text{Spec}(k(x))$ . D'après [Et 5, (1.2.1)] il existe un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc}
A^\dagger \otimes_{\mathcal{V}} \mathcal{V}(x) =: A^\dagger(x) & \xrightarrow{F_{A^\dagger(x)}} & A^\dagger(x) \\
\uparrow & & \uparrow \\
A^\dagger & \xrightarrow{F_{A^\dagger}} & A^\dagger
\end{array}$$

au-dessus du carré commutatif

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{V}(x) & \xrightarrow{\sigma_{\mathcal{V}(x)}} & \mathcal{V}(x) \\
\uparrow & & \uparrow \\
\mathcal{V} & \xrightarrow{\sigma_{\mathcal{V}}} & \mathcal{V}
\end{array} ,$$

où  $F_{A^\dagger}$  est un relèvement à  $A^\dagger$  du Frobenius (puissance  $q$ ) de  $A_0$ ; d'où un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{V}(x) & \longrightarrow & A^\dagger(x) & \longrightarrow & \hat{A}(x) := \hat{A} \otimes_{\mathcal{V}} \mathcal{V}(x) \\
\sigma_{\mathcal{V}(x)} \downarrow & & F_{A^\dagger(x)} \downarrow & & \downarrow F_{\hat{A}(x)} \\
\mathcal{V}(x) & \longrightarrow & A^\dagger(x) & \longrightarrow & \hat{A}(x)
\end{array} .$$

Par conséquent le morphisme  $s : A_0 \rightarrow k(x)$  se relève de manière unique d'après Katz [K 1] en un morphisme

$$\tau(x) : \hat{A}(x) \rightarrow \mathcal{V}(x)$$

tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
\hat{A}(x) & \xrightarrow{\tau(x)} & \mathcal{V}(x) \\
F_{\hat{A}(x)} \downarrow & & \downarrow \sigma_{\mathcal{V}(x)} \\
\hat{A}(x) & \xrightarrow{\tau(x)} & \mathcal{V}(x)
\end{array}$$

commute :  $\tau(x)$  est appelé le **relèvement de Teichmüller de  $s$  (ou de  $x$ )**. Les morphismes composés

$$\hat{\tau}(x) : \hat{A} \hookrightarrow \hat{A}(x) \xrightarrow{\tau(x)} \mathcal{V}(x) ,$$

$$\tau^\dagger(x) : A^\dagger \hookrightarrow \hat{A} \xrightarrow{\hat{\tau}(x)} \mathcal{V}(x)$$

sont surjectifs car la réduction de  $\tau^\dagger(x)$  mod  $\pi$  est le morphisme surjectif  $s : A_0 \rightarrow k(x)$  de départ [M-W, theo 3.2]; donc  $\mathcal{V}(x)$  est un quotient de  $\hat{A}$  et



$\mathcal{V}(x) \simeq W(x)[\pi]$ , qui est un anneau de valuation discrète, est une extension finie étale de  $\mathcal{V}$  de rang  $\deg x$ . Le noyau du morphisme

$$\hat{\tau}_K(x) := \hat{\tau}(x) \otimes_{\mathcal{V}} K : \hat{A}_K \longrightarrow K(x) = \text{Frac}(\mathcal{V}(x))$$

est ainsi un idéal maximal  $\mathfrak{q}_x$  de  $\hat{A}_K$  et le diagramme

$$(3.1.1) \quad \begin{array}{ccccc} A_K^\dagger & \hookrightarrow & \hat{A}_K & \xrightarrow{\hat{\tau}_K(x)} & K(x) \\ F_{A_K^\dagger} \downarrow & & F_{\hat{A}_K} \downarrow & & \downarrow \sigma_{K(x)} \\ A_K^\dagger & \hookrightarrow & \hat{A}_K & \xrightarrow{\hat{\tau}_K(x)} & K(x) \end{array}$$

commute. On notera  $\tau_K^\dagger(x)$  la flèche composée

$$(3.1.2) \quad \tau_K^\dagger(x) = \tau^\dagger(x) \otimes_{\mathcal{V}} K : A_K^\dagger \xrightarrow{\varphi} \hat{A}_K \xrightarrow{\hat{\tau}_K(x)} K(x) ;$$

remarquons que  $\tau_K^\dagger(x)$  est aussi surjectif car  $\varphi$  induit une bijection entre les idéaux maximaux de  $\hat{A}_K$  et ceux de  $A_K^\dagger$  [G-K 2, theo 1.7]. Par le morphisme de spécialisation [B 3, (0.2.2.1)]

$$sp : Spm \hat{A}_K \rightarrow Spec A_0$$

l'image de  $\{\mathfrak{q}_x\}$  n'est autre que  $\{\mathfrak{m}_x\}$ ; de plus  $\hat{\tau}(x) : \hat{A} \rightarrow \mathcal{V}(x)$  est localisé en  $\{\mathfrak{p}_x\} \in Spec \hat{A}$ , où  $\mathfrak{p}_x$  est l'unique idéal maximal de  $\hat{A}$  au-dessus de  $\mathfrak{m}_x$ . En définissant l'application (encore appelée **relèvement de Teichmüller**)

$$(3.1.3) \quad \hat{T}_K : Spm A_0 \rightarrow Spm \hat{A}_K$$

par  $\hat{T}_K(x) = \{\text{Ker } \hat{\tau}_K(x)\} = \{\mathfrak{q}_x\}$ , on vient de prouver que  $\hat{T}_K$  est **une section du morphisme de spécialisation**, considéré comme une application

$$sp : |Spm \hat{A}_K| \rightarrow |Spec A_0|.$$

### 3.2. Amplitude des $F$ -isocristaux

Soit  $X$  un  $k$ -schéma lisse. Berthelot a montré [B 3, (2.4.2)] que pour tout  $N \in F^a\text{-Isoc}(X/K)$  il existe un  $F$ -cristal non dégénéré  $M$  sur  $X$  (i.e. un cristal  $M$  muni d'un Frobenius  $\phi : F^*M \rightarrow M$  et d'un morphisme  $V : M \rightarrow F^*M$  tels que  $\phi \circ V$  et  $V \circ \phi$  soient la multiplication par  $p^b$ , pour un

entier  $b \geq 0$ ) de type fini sur  $\mathcal{O}_{X/\mathcal{V}}$  et sans  $p$ -torsion, et un entier  $r \geq 0$  tel que  $N \simeq M^{an}(r)$  (où  $M^{an}(r)$  est le twist à la Tate de  $M^{an}$ ). L'entier  $b$  est appelé l'amplitude de  $M$  ("width" dans la terminologie de Ogus [O 4, 5.1.1]). Notons

$$(3.2.1) \quad F^a\text{-}Isoc(X/K)_{plat}$$

la sous-catégorie pleine de  $F^a\text{-}Isoc(X/K)$  formée des  $N$  tels que le  $M$  ci-dessus soit plat sur  $\mathcal{O}_{X/\mathcal{V}}$  (ce qui équivaut à  $M$  localement libre puisqu'on est en situation noethérienne).

### 3.3. Convergence des images directes

**Théorème (3.3.1).** *Supposons  $k$  parfait et  $e \leq p-1$ . Soient  $S$  un  $k$ -schéma lisse et  $f : X \rightarrow S$  un  $k$ -morphisme propre et lisse (resp. relevable en un morphisme propre et lisse  $h : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{S}$  de  $\mathcal{V}$ -schémas formels). Alors*

(3.3.1.1) *Pour tout entier  $i \geq 0$ ,  $f$  induit un foncteur*

$$R^i f_{conv*} : F^a\text{-}Isoc(X/K)_{plat} \longrightarrow F^a\text{-}Isoc(S/K)$$

$$(resp. R^i f_{conv*} : F^a\text{-}Isoc(X/K) \longrightarrow F^a\text{-}Isoc(S/K)).$$

(3.3.1.2) *Le foncteur précédent est compatible aux changements de base entre  $k$ -schémas lisses, c'est-à-dire : pour tout carré cartésien*

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g'} & X \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ S' & \xrightarrow{g} & S \end{array}$$

*avec  $S'$  lisse sur  $k$  et  $\mathcal{E} \in F^a\text{-}Isoc(X/K)_{plat}$  (resp.  $\mathcal{E} \in F^a\text{-}Isoc(X/K)$ ) on a un isomorphisme de changement de base*

$$g^* R^i f_{conv*}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} R^i f'_{conv*}(g'^*(\mathcal{E}))$$

*compatible aux connexions et aux Frobenius.*

*Démonstration.*

*Première partie de la démonstration : le cas propre et lisse, non nécessairement relevable.*

Dans un premier temps nous ne supposerons pas que le corps  $k$  est parfait, seulement qu'il est de caractéristique  $p > 0$  et que  $e \leq p - 1$  : uniquement lorsqu'il faudra montrer que le Frobenius est un isomorphisme, nous supposerons que  $k$  est parfait.

Soient  $\mathcal{E} \in F^a\text{-Isoc}(X/K)_{\text{plat}}$  et  $E$  un  $F$ -cristal non dégénéré tel que  $\mathcal{E} \simeq E^{an}(r)$ . On va associer à  $E$ ,  $f$  et l'entier  $i \geq 0$ , un objet de  $F^a\text{-Isoc}(S/K)$ , i.e. pour tout ouvert  $U$  (affine et lisse) de  $S$  on va construire un élément de  $F^a\text{-Isoc}(U/K)$  avec données de recollement [B 3, (2.3.2) (iii)].

Si  $\mathcal{T}$  est un  $\mathcal{V}$ -schéma formel on pose  $T_n = \mathcal{T}/\pi^{n+1} \mathcal{T}$ , et pour un  $T_0$ -schéma de type fini  $Y$  on désigne par  $(Y/\mathcal{T})_{\text{cris}}$  le topos cristallin [B-O, 7.17] [O 4, § 3.0]. Le morphisme  $f$  induit un morphisme de topos

$$f_{\text{cris}} : (X/\mathcal{V})_{\text{cris}} \longrightarrow (S/\mathcal{V})_{\text{cris}} .$$

Soit  $U = \text{Spec} A_0 \hookrightarrow S$  un ouvert affine et lisse et  $A$  une  $\mathcal{V}$ -algèbre lisse relevant  $A_0$  : posons  $\mathcal{T} = \text{Spf } \hat{A}$ ,  $T_n = \text{Spec } (A/\pi^{n+1} A)$ . Alors  $(U, T_n, \delta)$ , où  $\delta$  sont les puissances divisées canoniques sur  $\pi \mathcal{O}_{T_n}$  ( $e \leq p - 1$  : [B 1, I, § 1]), est un ouvert de  $\text{Cris } (S/\mathcal{V})$ . Le Frobenius  $F_U$  de  $U$  (élévation à la puissance  $p^a$  sur  $\mathcal{O}_U$ ) se relève en un endomorphisme  $F_{\mathcal{T}}$  de  $\mathcal{T}$  (resp.  $F_{T_n} := F_{\mathcal{T}} \bmod \pi^{n+1}$ , de  $T_n$ ) et on considère les diagrammes commutatifs

$$(3.3.1.3) \quad \begin{array}{ccccc} X'_U & \xrightarrow{\varphi} & X_U & \hookrightarrow & X \\ f'_U \downarrow & & \downarrow f_U & & \downarrow f \\ U & \xrightarrow{F_U} & U & \hookrightarrow & S \\ i_{T_n} \downarrow & & \downarrow i_{T_n} & & \downarrow \\ (T_n, \pi, \delta) & \xrightarrow{F_{T_n}} & (T_n, \pi, \delta) & \longrightarrow & \text{Spec } \mathcal{V}_n , \end{array}$$

$$(3.3.1.4) \quad \begin{array}{ccccc} X'_U & \xrightarrow{\varphi} & X_U \hookrightarrow & X \\ f'_U \downarrow & & \downarrow f_U & \downarrow f \\ U & \xrightarrow{F_U} & U \hookrightarrow & S \\ i_{\mathcal{T}} \downarrow & & \downarrow i_{\mathcal{T}} & \downarrow \\ (\mathcal{T}, \pi, \delta) & \xrightarrow{F_{\mathcal{T}}} & (\mathcal{T}, \pi, \delta) & \longrightarrow \mathrm{Spf} \, \mathcal{V}, \end{array}$$

dont les carrés supérieurs sont cartésiens. Soient  $f_{X_U/T_n}$  [B 1, V, 3.5.2] et  $f_{X_U/\mathcal{T}}$  [B-O, § 7.21] les morphismes de topos

$$\begin{aligned} f_{X_U/T_n} : (X_U/T_n)_{\mathrm{cris}} &\xrightarrow{u_{X_U/T_n}} X_{U_{Zar}} \xrightarrow{i_{T_n} \circ f_U} T_{n_{Zar}} \\ f_{X_U/\mathcal{T}} : (X_U/\mathcal{T})_{\mathrm{cris}} &\xrightarrow{u_{X_U/\mathcal{T}}} X_{U_{Zar}} \xrightarrow{i_{\mathcal{T}} \circ f_U} \mathcal{T}_{Zar}. \end{aligned}$$

Avec les notations de [B 1, V, 3.2.3] on a

$$(3.3.1.5) \quad \mathbb{R}f_{\mathrm{cris}^*}(E)_{(U, T_n)} = \mathbb{R}f_{X_U/T_n^*}(\omega_{T_n}^*(E))$$

et [B-O, 7.2.2.2] :

$$(3.3.1.6) \quad \mathbb{R}f_{X_U/\mathcal{T}^*}(\omega_{\mathcal{T}}^*(E)) \simeq \mathbb{R} \varprojlim_n \mathbb{R}f_{X_U/T_n^*}(\omega_{T_n}^*(E)).$$

Posons

$$(3.3.1.7) \quad \widetilde{R^i f_{\mathrm{cris}}(E)}_{(U, \mathcal{T})} := \varprojlim_n R^i f_{X_U/T_n^*}(\omega_{T_n}^*(E)).$$

Le schéma formel  $\mathcal{T}$ , identifié à la limite inductive  $\{T_n\}$  des  $T_n$ , est ce que Ogus appelle un “épaississement fondamental de  $U$  relativement à  $\mathrm{Spf} \, \mathcal{V}$ ” [O 4, § 3.0].

Puisque  $E$  est localement libre de type fini et  $f$  propre et lisse, le complexe  $\mathbb{R}f_{X_U/T_n^*}(\omega_{T_n}^*(E))$  est un complexe parfait de  $\mathcal{O}_{T_n}$ -modules [B 1, VII, 1.1.1] ; or, par le théorème de changement de base en cohomologie cristalline [B 1, V, 3.5.2] on a un isomorphisme

$$\mathbb{R}f_{X_U/T_n^*}(\omega_{T_n}^*(E)) \otimes_{\mathcal{O}_{T_n}}^{\mathbb{L}} \mathcal{O}_{T_{n-1}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}f_{X_U/T_{n-1}^*}(\omega_{T_{n-1}}^*(E)) :$$

par suite [B-O, def B-4]  $\mathbb{R}f_{X_U/T_\bullet^*}(\omega_{T_\bullet}^*(E))$  est un objet "consistant" au sens de [loc. cit.], donc [B-O, prop B-7]

$$\begin{aligned} R^i f_{X_U/T^*}(\omega_T^*(E)) &= H^i(\mathbb{R}f_{X_U/T^*}(\omega_T^*(E))) \\ &\simeq H^i(\mathbb{R} \varprojlim_n \mathbb{R}f_{X_U/T_n^*}(\omega_{T_n}^*(E))) \\ &\simeq \varprojlim_n R^i f_{X_U/T_n^*}(\omega_{T_n}^*(E)) , \end{aligned}$$

d'où, via (3.3.1.7), et [B-O, prop B-7], un isomorphisme de  $\mathcal{O}_T$ -modules cohérents

$$(3.3.1.8) \quad \widetilde{R^i f_{\text{cris}}(E)}_{(U,T)} \simeq R^i f_{X_U/T^*}(\omega_T^*(E)).$$

Soit  $V_\bullet = (V_\alpha)_\alpha \xrightarrow{u_\bullet = (u_\alpha)_\alpha} X_U$  un hyperrecouvrement fini de  $X_U$  par des ouverts affines,  $V_\alpha = \text{Spec}(B_{\alpha,0})$  : soient  $B_\alpha$  une  $\hat{A}$ -algèbre lisse relevant  $B_{\alpha,0}$ ,  $\mathcal{P}_\alpha := \text{Spf}(\hat{B}_\alpha)$ ,

$$h_{\alpha,n} : P_{\alpha,n} = \text{Spec}(B_\alpha/\pi^{n+1} B_\alpha) \longrightarrow T_n,$$

$$h_{\bullet,n} : P_{\bullet,n} \longrightarrow T_n,$$

$h_\alpha : \mathcal{P}_\alpha \longrightarrow \mathcal{T}$  la limite inductive des  $\{h_{\alpha,n}\}_n$  et posons

$$E_{P_{\alpha,n}} = u_\alpha^*(\omega_{T_n}^*(E)), \quad E_{P_{\bullet,n}} = u_\bullet^*(\omega_{T_n}^*(E)) ,$$

$$E_{\mathcal{P}_\alpha} = \varprojlim_n E_{P_{\alpha,n}} \quad , \quad E_{\mathcal{P}_\bullet} = \{E_{\mathcal{P}_\alpha}\}_\alpha ,$$

$$h_\bullet = \{h_\alpha\}_\alpha : \mathcal{P}_\bullet = \{\mathcal{P}_\alpha\}_\alpha \longrightarrow \mathcal{T} ,$$

$$C_{\alpha,n}^\bullet = E_{P_{\alpha,n}} \otimes \Omega_{P_{\alpha,n}/T_n}^\bullet ,$$

$$\Omega_{P_\bullet/\mathcal{T}}^\bullet = \{\Omega_{P_\alpha/\mathcal{T}}^\bullet\}_\alpha ,$$

et remarquons que l'on a un isomorphisme

$$\Omega_{\mathcal{P}_\alpha/\mathcal{T}}^\bullet \simeq \varprojlim_n \Omega_{P_{\alpha,n}/T_n}^\bullet .$$

D'après (Il 1, (0.3.2.6.2), (0.3.2.2), (0.3.2.4)] il existe un isomorphisme

$$\mathbb{R}f_{X_U/T_n^*}(\omega_{T_n}^*(E)) \simeq \mathbb{R}h_{\bullet,n^*}(E_{P_{\bullet,n}} \otimes \Omega_{P_{\bullet,n}/T_n}^\bullet),$$

et avec les notations de [B-O, Appendix B] on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} K(\mathbb{N}, \mathcal{O}_{P_{\alpha,\bullet}}) & \xrightarrow{Rh_{\alpha,\bullet} = \{Rh_{\alpha,n^*}\}_n} & K(\mathbb{N}, \mathcal{O}_{T_\bullet}) \\ \downarrow R\Gamma(\mathbb{N}, -) & & \downarrow R\Gamma(\mathbb{N}, -) \\ K(\mathcal{O}_{\mathcal{P}_\alpha}) & \xrightarrow{Rh_{\alpha^*}} & K(\mathcal{O}_T) \end{array},$$

puisqu'il en est ainsi avant de passer aux foncteurs dérivés [Et 2, dém. de III, 3.1.1]. Or le complexe  $\{C_{\alpha,n}^\bullet\}_n \in K(\mathbb{N}, \mathcal{O}_{P_{\alpha,\bullet}})$  a des flèches de transition surjectives, donc vérifie la condition de Mittag-Leffler ; par suite

$$\mathbb{R} \varprojlim_n \mathbb{R}h_{\alpha,n^*}(C_{\alpha,n}^\bullet) = \mathbb{R}h_{\alpha^*}(E_{\mathcal{P}_\alpha} \otimes \Omega_{P_\alpha/T}^\bullet)$$

et donc

$$(3.3.1.9) \quad R^i f_{\text{cris}^*}(\widetilde{E})_{(U,T)} \simeq R^i f_{X_U/T^*}(\omega_T^*(E)) \simeq H^i(\mathbb{R}h_{\bullet^*}(E_{\mathcal{P}_\bullet} \otimes \Omega_{\mathcal{P}_\bullet/T}^\bullet)).$$

Montrons à présent que  $R^i f_{\text{cris}^*}(\widetilde{E})_{(U,T)}$  est muni d'un morphisme de Frobenius

$$F_T^*(R^i f_{\text{cris}^*}(\widetilde{E})_{(U,T)}) \longrightarrow R^i f_{\text{cris}^*}(\widetilde{E})_{(U,T)}.$$

Considérons la factorisation usuelle du Frobenius  $F_X$  (avec  $F_X^*(x) = x^q$ )

(3.3.1.10)

$$\begin{array}{ccccc} X & & & & \\ & \searrow^{F_{X/S}} & & \searrow^{F_X} & \\ & & X' & \xrightarrow{\pi_{X/S}} & X \\ & \searrow^f & \downarrow f' & & \downarrow f \\ & & S & \xrightarrow{F_S} & S \end{array}$$

où le carré est cartésien ; le morphisme de Frobenius de  $E$ ,  $\phi : F_{X/S}^* E' = F_X^* E \rightarrow E$ , où  $E' := \pi_{X/S}^*(E)$ , définit par image inverse

$$\omega_{T_n}^*(\phi) : F_{X_U/U}^* \varphi^* \omega_{T_n}^* E = \omega_{T_n}^* F_{X/S}^* E' = \omega_{T_n}^* F_X^* E \rightarrow \omega_{T_n}^* E.$$

D'où, en notant  $\omega_T^*(E) = \varprojlim_n \omega_{T_n}^*(E)$  et  $\omega_T^*(\phi) = \varprojlim_n \omega_{T_n}^*(\phi)$ , une flèche

$$\omega_T^*(\phi) : F_{X_U/U}^* \varphi^* \omega_T^*(E) = F_{X_U}^* \omega_T^*(E) = \omega_T^* F_X^*(E) \rightarrow \omega_T^*(E).$$

La flèche  $\mathbb{R}f_{X_U/T^*}(\omega_T^*(\phi))$  est un morphisme

$$\mathbb{R}f_{X_U/T^*}(F_{X_U/U}^* \varphi^* \omega_T^*(E)) = \mathbb{R}f_{X_U/T^*}(F_{X_U}^* \omega_T^*(E)) \rightarrow \mathbb{R}f_{X_U/T^*}(\omega_T^*(E));$$

par composition avec le morphisme

$$\mathbb{R}f_{X'_U/T^*}(\varphi^* \omega_T^*(E)) \longrightarrow \mathbb{R}f_{X_U/T^*}(F_{X_U/U}^* \varphi^* \omega_T^*(E))$$

provenant du passage à la limite dans le morphisme de changement de base en cohomologie cristalline [B 1, V, (3.5.3)] et avec l'isomorphisme

$$F_T^*(\mathbb{R}f_{X_U/T^*}(\omega_T^*(E))) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}f_{X'_U/T^*}(\varphi^* \omega_T^*(E))$$

provenant de la platitude de  $F_T$  et du passage à la limite dans l'isomorphisme de changement de base en cohomologie cristalline [B 1, V, (3.5.3)], on obtient un morphisme

$$(3.3.1.11) \quad \tilde{\phi} : F_T^*(\mathbb{R}f_{X_U/T^*}(\omega_T^*(E))) \longrightarrow \mathbb{R}f_{X_U/T^*}(\omega_T^*(E)).$$

Par passage à la cohomologie,  $\phi^i = H^i(\tilde{\phi})$  est le morphisme de Frobenius recherché

$$(3.3.1.12) \quad \begin{array}{ccc} \phi^i : F_T^*(R^i f_{X_U/T^*}(\omega_T^*(E))) & \longrightarrow & R^i f_{X_U/T^*}(\omega_T^*(E)) \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ F_T^*(\underbrace{R^i f_{\text{cris}^*}(E)}_{U,T}) & & R^i \underbrace{f_{\text{cris}^*}(E)}_{(U,T)}. \end{array}$$

Considérons à présent le point de vue rigide analytique. Notons  $E^{an}$  le  $F$ -isocristal convergent, élément de  $F^a\text{-Isoc}(X/K)$ , associé par la construction de Berthelot [B 3, 2.4] au  $F$ -cristal non dégénéré de type fini  $E$ .

Par définition des images directes supérieures en cohomologie rigide [B 5, 3.2.3, 3.2.3.2, 3.1.12], [C-T, § 10] et [II, 3.2], on a

$$(3.3.1.13) \quad \mathbb{R}f_{U\text{rig}^*}(X_U/\mathcal{T}, E_{|X_U}^{an}) = \mathbb{R}h_{\bullet K*}(E_{\mathcal{P}_{\bullet K}} \otimes \Omega_{\mathcal{P}_{\bullet K}/\mathcal{T}_K}^\bullet)$$

$$\text{où } h_{\bullet K} = \{h_\alpha \otimes_{\mathcal{V}} K\}_\alpha \quad , \quad E_{\mathcal{P}_{\bullet K}} = \{(E_{\mathcal{P}_\alpha})^{an}\}_\alpha,$$

$$\Omega_{\mathcal{P}_{\bullet K}/\mathcal{T}_K}^\bullet = \{(\Omega_{\mathcal{P}_\alpha/\mathcal{T}}^\bullet)^{an}\}_\alpha.$$

Vu les descriptions précédentes, on a donc [B 5, (3.2.3.2)]

$$\begin{aligned} R^i f_{U\text{rig}}^*(X_U/\mathcal{T}, E_{|X_U}^{an}) &= R^i f_{U\text{conv}}^*(X_U/\mathcal{T}, E_{|X_U}^{an}) \\ (3.3.1.14) \quad &= (R^i \widetilde{f_{\text{cris}}^*}(E)_{(U,\mathcal{T})})^{an}, \end{aligned}$$

et ce  $\mathcal{O}_{\mathcal{T}_K}$ -module cohérent (d'après (3.3.1.8)) est muni de la connexion de Gauß-Manin via la description (3.3.1.13) (cf [B 1, V, 3.6]) : par la fonctorialité de la construction de  $\check{\phi}$  cette connexion est compatible au Frobenius  $\phi_K^i$  induit par  $\phi^i$  :

$$(3.3.1.15) \quad \phi_K^i : F_{\mathcal{T}_K}^* R^i f_{U\text{rig}}^*(X_U/\mathcal{T}, E_{|X_U}^{an}) \rightarrow R^i f_{U\text{rig}}^*(X_U/\mathcal{T}, E_{|X_U}^{an}).$$

Nous allons montrer plus bas que  $\phi_K^i$  est un isomorphisme lorsque  $k$  est fini : puisque la source et le but de  $\phi_K^i$  sont des  $\mathcal{O}_{\mathcal{T}_K}$ -modules cohérents, il suffit de montrer cet isomorphisme fibre à fibre aux points fermés de  $\mathcal{T}_K$  [B-G-R, 9.4.2, cor 7].

Soient

$$i_s : s = \text{Spec } k(s) \hookrightarrow S$$

un point fermé de  $S$  et  $f_s : X_s \rightarrow s$  la fibre de  $f$  en  $s$ . On note  $\mathcal{V}(s) = W(k(s)) \otimes_W \mathcal{V}$  et  $K(s)$  le corps des fractions de  $\mathcal{V}(s)$ . Le morphisme  $i_s$  définit un foncteur image inverse [B 3, (2.3.6), (2.3.7)]

$$\begin{aligned} i_s^* : F^a\text{-Isoc}(S/K) &\longrightarrow F^a\text{-Isoc}(\text{Spec}(k(s))/K(s)) \\ &\downarrow \simeq \\ &F^a\text{-Isoc}^\dagger(\text{Spec}(k(s))/K(s)), \end{aligned}$$

et un morphisme de topos [B 1, III, 2.2.3]

$$i_{s\text{ cris}} : (X_s/\mathcal{V}(s))_{\text{cris}} \rightarrow (X/\mathcal{V})_{\text{cris}}.$$

Le point fermé  $s$  est contenu dans un ouvert affine et lisse  $U = \text{Spec } A_0$  de  $S$  : on considérera  $i_s$  comme un morphisme  $i_s : \text{Spec } k(s) \hookrightarrow U$ . On note

$$\hat{\tau}(s) : \mathcal{T}_s = \text{Spf}(\mathcal{V}(s)) \hookrightarrow \mathcal{T}$$



le relèvement de Teimüller de  $i_s$  [(3.1)]. On obtient alors un diagramme commutatif à carrés cartésiens

$$\begin{array}{ccc}
 X_s & \xrightarrow{i_X} & X_U \\
 f_s \downarrow & & \downarrow f_U \\
 \mathrm{Spec} \, k(s) & \xrightarrow{i_s} & U = \mathrm{Spec} \, A_0 \\
 i_{\mathcal{T}_s} \downarrow & & \downarrow i_{\mathcal{T}} \\
 \mathcal{T}_s = \mathrm{Spf}(\mathcal{V}(s)) & \xrightarrow[\hat{\tau}(s)]{} & \mathcal{T} = \mathrm{Spf}(\hat{A}) ;
 \end{array}$$

$\hat{\tau}(s)$  est un PD-morphisme pour les idéaux  $\pi\mathcal{V}(s)$  et  $\pi\hat{A}$  munis des puissances divisées canoniques (car  $e \leq p-1$ ).

Par analogie avec (3.1) notons  $\hat{\tau}_K(s)$

$$\hat{\tau}_K(s) : \mathcal{T}_{K(s)} = \mathrm{Spm}(K(s)) \hookrightarrow \mathcal{T}_K = \mathrm{Spm}(\hat{A}_K)$$

le morphisme induit par  $\hat{\tau}(s)$ .

Comme  $\hat{\tau}(s)$  définit un morphisme de topos  $\mathcal{T}_{s\mathrm{Zar}} \rightarrow \mathcal{T}_{\mathrm{Zar}}$ , le foncteur  $\hat{\tau}^*(s)$  est exact [SGA 4, T1, IV 3.1.2]; ainsi le passage à la limite dans l'isomorphisme de changement de base de [B 1, V, (3.5.1)] fournit un isomorphisme

$$\hat{\tau}^*(s) R^i f_{X_U/\mathcal{T}}^*(\omega_{\mathcal{T}}^*(E)) \xrightarrow{\sim} R^i f_{X_s/\mathcal{T}_s}^*(\omega_{\mathcal{T}_s}^*(E)).$$

Comme  $i_s^*$  est induit par  $\hat{\tau}^*(s)$  [B 3, (2.3.6) p 72], en passant en rigide analytique on en déduit l'isomorphisme

$$i_s^* R^i f_{U\mathrm{rig}}^*(X_U/\mathcal{T}, E_{|X_U}^{an}) = \hat{\tau}_K^*(s) R^i f_{U\mathrm{rig}}^*(X_U/\mathcal{T}, E_{|X_U}^{an}) \xrightarrow{\sim} R^i f_{s\mathrm{rig}}^*(X_s/\mathcal{T}_s, E_{|X_s}^{an}),$$

où, par définition [B 5] et [II, (3.2)], l'on a :

$$R^i f_{s\mathrm{rig}}^*(X_s/\mathcal{T}_s, E_{|X_s}^{an}) = H_{\mathrm{rig}}^i(X_s/K(s), E_{|X_s}^{an});$$

d'où l'isomorphisme

$$(3.3.1.16) \quad \hat{\tau}_K^*(s) R^i f_{U\mathrm{rig}}^*(X_U/\mathcal{T}, E_{|X_U}^{an}) \xrightarrow{\sim} H_{\mathrm{rig}}^i(X_s/K(s), E_{|X_s}^{an}).$$

*Supposons dorénavant dans cette première partie que  $k$  est parfait.* Compte tenu de (3.1.1) et de (3.3.1.16) la fibre en  $s$  (identifié à  $\hat{\tau}_K(s)$ ) de  $\phi_K^i$  est donc un morphisme

(3.3.1.17)

$$\begin{array}{ccc}
\phi_{K(s)}^i : & \hat{\tau}_K^*(s) F_{T_K}^* R^i f_{U\text{rig}}^*(X_U/\mathcal{T}, E_{|X_U}^{an}) & \longrightarrow \hat{\tau}_K^*(s) R^i f_{U\text{rig}}^*(X_U/\mathcal{T}, E_{|X_U}^{an}) \\
& \parallel & \parallel \\
& \sigma_{K(s)}^* \hat{\tau}_K^*(s) R^i f_{U\text{rig}}^*(X_U/\mathcal{T}, E_{|X_U}^{an}) & \longrightarrow \hat{\tau}_K^*(s) R^i f_{U\text{rig}}^*(X_U/\mathcal{T}, E_{|X_U}^{an}) \\
& \downarrow \simeq & \downarrow \simeq \\
& \sigma_{K(s)}^* H_{\text{rig}}^i(X_s/K(s), E_{|X_s}^{an}) & \longrightarrow H_{\text{rig}}^i(X_s/K(s), E_{|X_s}^{an}) .
\end{array}$$

Or, on a la généralisation suivante de [E-LS 1, 2.1] :

**Proposition (3.3.1.18).** *Soient  $X$  un  $k$ -schéma séparé de type fini,  $F_X$  l'itéré  $a$ -ième du Frobenius absolu de  $X$ ,  $F_X = \pi_{X/k} \circ F_{X/k}$  sa factorisation (3.3.1.10)*

$$X \xrightarrow{F_{X/k}} X' \xrightarrow{\pi_{X/k}} X$$

et  $\sigma : K \rightarrow K' = K$  le relèvement choisi de la puissance  $q$  de  $k$  (cf[II, 0]). Pour  $E \in \text{Isoc}^\dagger(X/K)$ , on a :

- (i) Pour tout entier  $i \geq 0$ ,  $F_{X/k}$  induit une injection  $K$ -linéaire

$$F_{X/k}^* : H_{\text{rig},c}^i(X'/K', \pi_{X/k}^*(E)) \rightarrow H_{\text{rig},c}^i(X/K, F_X^*(E)).$$

Si de plus  $X$  est lisse sur  $k$ , la même assertion vaut pour la cohomologie rigide sans supports compacts.

- (ii) Supposons de plus  $k$  parfait. Alors, sous les hypothèses du (i), le morphisme  $F_{X/k}^*$  précédent est un isomorphisme.
- (iii) Supposons  $k$  parfait. Alors, pour tout entier  $i \geq 0$ ,  $F_X$  induit une bijection  $\sigma$ -linéaire

$$F_X^* : H_{\text{rig},c}^i(X/K, E) \rightarrow H_{\text{rig},c}^i(X/K, F_X^*(E))$$

c'est-à-dire un isomorphisme

$$\sigma^*(H_{\text{rig},c}^i(X/K, E)) \xrightarrow{\sim} H_{\text{rig},c}^i(X/K, F_X^*(E)).$$

Si de plus  $X$  est lisse sur  $k$ , la même assertion vaut pour la cohomologie rigide sans supports compacts.

*Démonstration de (3.3.1.18).* La preuve suit celle de [E-LS 1, 2.1].

Pour (i). On notera  $H^i(X/K, E)$  la cohomologie rigide avec ou sans supports

compacts. En utilisant la suite exacte longue de localisation en cohomologie rigide à supports compacts (resp. la suite spectrale de localisation lorsque  $X$  est lisse sur  $k$ ) on se ramène au cas où  $X$  est un sous-schéma de  $\mathbb{P}_k^n$  qui ne rencontre pas les hyperplans de coordonnées; comme la cohomologie rigide commute aux extensions finies de  $K$  on peut supposer que  $K$  contient les racines  $q$ -ièmes de l'unité. On note  $F_{\mathbb{P}}$  l'endomorphisme  $\sigma$ -linéaire de  $\mathbb{P} = \mathbb{P}_{\mathcal{V}}^n$  défini par  $F_{\mathbb{P}}^*(t_i) = t_i^q$  pour  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ; on a la factorisation usuelle de  $F_{\mathbb{P}}$

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbb{P}_{\mathcal{V}}^n & & & & \\
 \swarrow F=F_{\mathbb{P}/\mathcal{V}} & \searrow F_{\mathbb{P}} & & & \\
 & \mathbb{P}_{\mathcal{V}}^{n(\sigma)} & \xrightarrow{\pi_{\mathbb{P}/\mathcal{V}}} & \mathbb{P}_{\mathcal{V}}^n & \\
 \downarrow g & \downarrow g^{(\sigma)} & & \downarrow g & \\
 \text{Spec}(\mathcal{V}) & \xrightarrow{\sigma} & \text{Spec}(\mathcal{V}) & & 
 \end{array}$$

où le carré est cartésien. En dehors des hyperplans de coordonnées, le morphisme

$$F_K = (F_{\mathbb{P}/\mathcal{V}})_K : \mathbb{P}_K^n \rightarrow \mathbb{P}_K^{n(\sigma)}$$

est un revêtement étale galoisien de groupe  $\mu_q^n \simeq (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^n$ . Or, si  $V$  désigne un voisinage strict suffisamment petit du tube de  $X'$ , alors  $F_K$  induit un revêtement étale galoisien encore noté  $F_K : W \rightarrow V$  de groupe  $\mu_q^n \simeq (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^n$ . De plus, on peut supposer que  $E' = \pi_{X/k}^*(E)$  provient d'un module à connexion  $\mathcal{M}$  sur  $V$  : tout  $F$ -automorphisme  $\psi$  de  $\mathbb{P}_{\mathcal{V}}^n$  induit un automorphisme  $\psi^*$  de  $F_K^* \mathcal{M} \otimes \Omega^\bullet$  et l'endomorphisme  $F_*(\sum \psi^*)$  de  $F_{K*} F_K^* \mathcal{M} \otimes \Omega_V^\bullet$  se factorise de manière unique par le morphisme de complexes

$$F_K^* : \mathcal{M} \otimes \Omega_V^\bullet \rightarrow F_{K*} F_K^* \mathcal{M} \otimes \Omega_V^\bullet$$

pour donner l'application trace

$$Tr : F_{K*} F_K^* \mathcal{M} \otimes \Omega_V^\bullet \rightarrow \mathcal{M} \otimes \Omega_V^\bullet$$

(cf [E-LS 1, 2.1] et [Mi, V, lemma 1.12]). Cette application induit des homomorphismes

$$tr : H^i(W, j_W^\dagger F_K^* \mathcal{M} \otimes \Omega^\bullet) \rightarrow H^i(V, j_V^\dagger \mathcal{M} \otimes \Omega^\bullet)$$

$$\text{et } tr : H_{|X|}^i(W, F_K^* \mathcal{M} \otimes \Omega^\bullet) \rightarrow H_{|X|}^i(V, \mathcal{M} \otimes \Omega^\bullet).$$

Puisque  $F$  prolonge  $F_{X/k}$ , l'application

$$F_{X/k}^* : H^i(X'/K', \pi_{X/k}^*(E)) \rightarrow H^i(X/K, F_X^*(E))$$

est induite par le morphisme de complexes  $F_K^*$ , et comme  $Tr \circ F_K^* = q^n$  sur  $\mathcal{M} \otimes \Omega_V^\bullet$ , on en déduit que  $tr \circ F_{X/k}^* = q^n$  sur  $H^i(X'/K', \pi_{X/k}^*(E))$ . D'où l'assertion du (i).

*Pour (ii).* Par définition on a  $F_K \circ Tr = F_*(\sum \psi^*)$  sur  $F_{K*}F_K^*\mathcal{M} \otimes \Omega_V^\bullet$ . D'autre part, si l'on note  $\psi_0$  la réduction mod  $\pi$  d'un  $F$ -automorphisme  $\psi$  de  $\mathbb{P}^n$ , alors, pour tout  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$  et  $\lambda_i \in k$ ,  $\psi_0$  vérifie

$$\psi_0^*(\lambda_i^q t_i^q) = \psi_0^* F_{X/k}^*(\lambda_i \otimes t_i) = F_{X/k}^*(\lambda_i \otimes t_i) = F_{X/k}^*(1 \otimes \lambda_i^q t_i) = \lambda_i^q t_i^q;$$

puisque  $k$  est parfait on en déduit que  $\psi_0$  est l'identité de  $X$ . Ainsi on voit que

$$F_{X/k}^* \circ tr = \sum Id^* = q^n$$

sur  $H^i(X/K, F_X^*(E))$ . On a donc montré que  $(1/q^n)tr$  est un inverse pour  $F_{X/k}^*$ .

*Pour (iii).* Le morphisme du (iii) est le composé

$$\sigma^*(H^i(X/K, E)) \xrightarrow{u} H^i(X'/K', \pi_{X/k}^*(E)) \xrightarrow{F_{X/k}^*} H^i(X/K, F_X^*(E))$$

où le morphisme  $u$  est induit par le changement de base  $F_k$  (puissance  $q$  sur  $k$ ) du carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{\pi_{X/k}} & X \\ \downarrow g' & & \downarrow g \\ \text{Spec } k & \xrightarrow{F_k} & \text{Spec } k \end{array} \quad .$$

Puisque  $k$  est parfait,  $F_k$  et  $\pi_{X/k}$  sont des isomorphismes, donc  $u$  en est un aussi. Ceci achève la preuve de (3.3.1.18).  $\square$

**Remarque (3.3.1.19).** Dans la preuve ci-dessus que  $u$  est un isomorphisme le corps  $k$  a été suppose parfait : il est un autre cas où  $u$  est un isomorphisme. Supposons que  $e \leq p-1$ ,  $X$  propre et lisse sur  $k$  et  $E \in F^a\text{-Isoc}^\dagger(X/K)_{\text{plat}}$  : alors  $u$  est un isomorphisme. En effet, d'après [B 3, (2.4.2)] il existe un  $F$ -cristal non dégénéré  $M$  sur  $X$  et un entier  $r \geq 0$  tels que  $E \simeq M^{an}(r)$  et par l'hypothèse faite sur  $E$ ,  $M$  est localement libre de type fini : le fait que

$u$  soit un isomorphisme résulte alors du théorème de changement de base en cohomologie cristalline [B 1, V, 3.5.7] et de l'isomorphisme

$$H_{rig}^i(X/K, E) \simeq H_{cris}^i(X/\mathcal{V}, M) \otimes_{\mathcal{V}} K(r)$$

( resp. de son analogue sur  $X'$ ) puisque  $X$  est propre et lisse sur  $k$ .

Revenons à la preuve de (3.3.1) : d'après (3.3.1.18) la dernière flèche horizontale du diagramme (3.3.1.17) est un isomorphisme ; par conséquent on a prouvé que  $\phi_K^i$  est un isomorphisme.

Montrons à présent que ces constructions se recollent pour  $U$  variable. Si  $U_1$  et  $U_2$  sont deux ouverts de  $S$  et

$$j_1 : U_3 = U_1 \cap U_2 \hookrightarrow U_1, j_2 : U_3 \hookrightarrow U_2$$

désignent les immersions ouvertes, le morphisme étale  $j_1$  se relève de manière unique en un morphisme étale  $j_1^n : T_{3,n} \rightarrow T_{1,n}$  où  $T_{i,n}$  correspond aux  $T_n$  précédents [EGA IV, (18.1.2)] : par passage à la limite on obtient un morphisme  $j_1^\infty = \varinjlim_n j_1^n : \mathcal{T}_3 = \varinjlim_n T_{3,n} \rightarrow \mathcal{T}_1 = \varinjlim_n T_{1,n}$  s'insérant dans un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} (X_{U_3}/\mathcal{T}_3)_{cris} & \xrightarrow{(j_{1X})_{cris}} & (X_{U_1}/\mathcal{T}_1)_{cris} \\ \downarrow u_{X_{U_3}/\mathcal{T}_3} & & \downarrow u_{X_{U_1}/\mathcal{T}_1} \\ X_{U_3} & \xrightarrow{j_{1X}} & X_{U_1} \\ \downarrow f_{U_3} & & \downarrow f_{U_1} \\ U_3 & \xrightarrow{j_1} & U_1 \\ \downarrow i_{\mathcal{T}_3} & & \downarrow i_{\mathcal{T}_1} \\ \mathcal{T}_3 & \xrightarrow{j_1^\infty} & \mathcal{T}_1 \end{array} \quad .$$

D'où, par passage à la limite dans l'isomorphisme de changement de base en cohomologie cristalline, un isomorphisme

$$\begin{aligned} j_1^{\infty*} R^i f_{X_{U_1}/\mathcal{T}_1^*}(\omega_{\mathcal{T}_1}^*(E)) & \xrightarrow{\sim} R^i f_{X_{U_3}/\mathcal{T}_3^*}(j_{1X}^{*cris} \omega_{\mathcal{T}_1}^*(E)) \\ & \parallel \\ & R^i f_{X_{U_3}/\mathcal{T}_3^*}(\omega_{\mathcal{T}_3}^*(E)). \end{aligned}$$

En passant en rigide analytique, et par unicité du relèvement  $j_1^\infty$ , les

$$R^i f_{U\text{rig}}^*(X_U/\mathcal{T}, E_{|X_U}^{an})$$

se recollent pour  $U$  variable et définissent donc un  $F$ -isocrystal convergent sur  $(S/K)$  grâce au corollaire (1.2.3) et [B 3, (2.2.11) et 2.3] : on note celui-ci

$$R^i f_{\text{conv}}^*(E^{an}) \in F^a\text{-Isoc}(S/K),$$

et si  $R^i f_{\text{cris}}^*(E)$  était localement libre ce serait le  $F$ -isocrystal convergent associé, grâce à (3.3.1.14). Pour notre  $\mathcal{E} \in F^a\text{-Isoc}(X/K)_{\text{plat}}$  initial, donné par  $\mathcal{E} \simeq E^{an}(r)$ , on pose donc

$$R^i f_{\text{conv}}^*(\mathcal{E}) = R^i f_{\text{conv}}^*(E^{an})(r),$$

et sa formation commute aux changements de base  $S' \rightarrow S$  puisqu'il en est ainsi pour  $R^i f_{X_U/\mathcal{T}}^*(\omega_{\mathcal{T}}^*(E))$ . Ceci achève la preuve de (3.3.1) dans le cas propre et lisse.

*Deuxième partie de la démonstration : cas où  $f$  est relevable en  $h$ .*

Dans le cas où  $f$  est relevable en  $h : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{S}$  propre et lisse de (3.3.1.1) il n'est plus nécessaire de supposer  $E$  localement libre,  $E$  sans  $p$ -torsion suffit. La flèche  $R^i f_{U\text{rig}}^*(X_U/\mathcal{T}; (\omega_{\mathcal{T}_K}^*(\phi)))(r)$  est un morphisme

$$R^i f_{U\text{rig}}^*(X_U/\mathcal{T}; (F_{X_U}^* \omega_{\mathcal{T}}^*(E))^{an})(r) \rightarrow R^i f_{U\text{rig}}^*(X_U/\mathcal{T}; (\omega_{\mathcal{T}}^*(E))^{an})(r);$$

par composition avec le morphisme de changement de base [B 5, (3.1.11.3)]

$$F_{\mathcal{T}_K}^* R^i f_{U\text{rig}}^*(X_U/\mathcal{T}, (\omega_{\mathcal{T}}^*(E))^{an})(r) \longrightarrow R^i f_{U\text{rig}}^*(X_U/\mathcal{T}; (\omega_{\mathcal{T}}^*(E))^{an})(r)$$

on obtient le morphisme de Frobenius (qu'on prouve être un isomorphisme comme en (3.3.1.17))

$$(3.3.1.20) \quad \phi_K^i : F_{\mathcal{T}_K}^* R^i f_{U\text{rig}}^*(X_U/\mathcal{T}, \mathcal{E}_{|X_U}) \xrightarrow{\sim} R^i f_{U\text{rig}}^*(X_U/\mathcal{T}, \mathcal{E}_{|X_U})$$

valable pour  $\mathcal{E} \in F^a\text{-Isoc}(X/K)$  et  $f$  relevable en  $h$  propre et lisse.

On conclut alors à la manière de [II, (3.4.8.2)] via [II, (3.4.4)].  $\square$

**Remarque (3.3.1.21).** Nous avons prouvé ci-dessus que  $R^i f_{U\text{rig}}^*(X_U/\mathcal{T}, E_{|X_U}^{an})$  est un  $\mathcal{O}_{\mathcal{T}_K}$ -module cohérent, qu'il est muni d'une connexion intégrable (de Gauß-Manin) et d'un morphisme de Frobenius sous la seule hypothèse que le corps  $k$  est de caractéristique  $p > 0$  et  $e \leq p - 1$  : c'est seulement pour

prouver que le Frobenius est un isomorphisme que nous avons été amenés à supposer que le corps  $k$  est parfait.

Le théorème suivant précise (3.3.1) en l'étendant :

**Théorème (3.3.2).** *Supposons  $k$  parfait. Soient  $S$  un  $k$ -schéma lisse et  $f : X \rightarrow S$  un  $k$ -morphisme projectif et lisse satisfaisant aux hypothèses de [II, (3.4.8.2)] ou [II, (3.4.8.6)] ou [II, (3.4.9)]. Alors, pour tout entier  $i \geq 0$ ,  $f$  induit un foncteur*

$$R^i f_{\text{conv}*} : F^a\text{-Isoc}(X/K) \rightarrow F^a\text{-Isoc}(S/K)$$

qui commute à tout changement de base  $S' \rightarrow S$  entre  $k$ -schémas lisses.

*Démonstration.* Compte tenu de [II, (3.4.8.2), (3.4.8.6) et (3.4.9)] il s'agit de vérifier que le Frobenius (qui est défini par fonctorialité [L.S, 8]) est un isomorphisme. D'après [B-G-R, (9.4.2/7)] il suffit de vérifier l'isomorphisme sur les points fermés de  $S$  et le résultat provient alors de [(3.3.1.18)].  $\square$

### 3.4. Fibres des $F$ -isocristaux convergents

Sous les hypothèses du théorème (3.3.1) avec  $f$  propre et lisse, soient

$$i_s : s = \text{Spec } k(s) \hookrightarrow S$$

un point fermé de  $S$  et  $f_s : X_s \rightarrow s$  la fibre de  $f$  en  $s$ . Pour  $\mathcal{E} \in F^a\text{-Isoc}(X/K)_{\text{plat}}$  on pose

$$(3.4.1) \quad R^i f_{\text{conv}*}(\mathcal{E})_s := i_s^* R^i f_{\text{conv}*}(\mathcal{E}).$$

Comme  $i_s^*$  est induit par  $\hat{\tau}^*(s)$  [B 3, (2.3.6) p 72], on a démontré en (3.3.1.15) l'isomorphisme

$$(3.4.2) \quad i_s^* R^i f_{\text{conv}*}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} R^i f_{s \text{ conv}*}(\mathcal{E}|_{X_s}) = H_{\text{rig}}^i(X_s/K(s); \mathcal{E}|_{X_s}).$$

Compte tenu de [II, (3.4.7) et (3.4.8.2)] on a prouvé :

**Proposition (3.4.3).** *Sous les hypothèses du théorème (3.3.1), avec  $f$  propre et lisse (resp. sous les hypothèses du théorème (3.3.2)), et pour  $\mathcal{E} \in F^a\text{-Isoc}(X/K)_{\text{plat}}$  (resp.  $\mathcal{E} \in F^a\text{-Isoc}(X/K)$ ) et tout point fermé  $s$  de  $S$ , la fibre en  $s$  de  $R^i f_{\text{conv}*}(\mathcal{E})$  est un  $K(s)$ -espace vectoriel de dimension finie donné par*

$$R^i f_{\text{conv}*}(\mathcal{E})_s \simeq H_{\text{rig}}^i(X_s/K(s); \mathcal{E}|_{X_s}).$$

Comme corollaire du théorème (3.3.1), on retrouve un cas particulier d'un théorème de Ogus sur la finitude de la cohomologie convergente [O 3, 0.7.9] :

**Corollaire (3.4.4).** *Supposons  $k$  parfait et  $e \leq p-1$ . Soient  $X$  un  $k$ -schéma propre et lisse, et  $\mathcal{E} \in F^a\text{-Isoc}(X/K)_{\text{plat}}$ . Alors, pour tout entier  $i \geq 0$ , les groupes de cohomologie convergente  $H_{\text{conv}}^i(X/K; \mathcal{E})$  sont des  $K$ -espaces vectoriels de dimension finie.*

*Démonstration.* Il suffit d'appliquer (3.3.1) avec  $S = \text{Spec } k$  et [B 5, (3.2.3)].  
□

### 3.5. Cas fini étale

Dans le cas fini étale on n'a pas lieu de supposer  $k$  parfait ni  $e \leq p-1$  et de se restreindre, comme dans le théorème (3.3.1), au cas des  $F$ -cristaux localement libres :

**Théorème (3.5.1).** *Soient  $S$  un  $k$ -schéma lisse et  $f : X \rightarrow S$  un  $k$ -morphisme fini étale. Alors*

(3.5.1.1) *Pour tout entier  $i \geq 0$ , on a des foncteurs*

- (i)  $R^i f_{\text{conv}*} : \text{Isoc}(X/K) \rightarrow \text{Isoc}(S/K)$ ,
- (ii)  $R^i f_{\text{conv}*} : F^a\text{-Isoc}(X/K) \rightarrow F^a\text{-Isoc}(S/K)$ ,
- (iii) *Pour  $\mathcal{E} \in \text{Isoc}(X/K)$  et  $i \geq 1$  on a*

$$R^i f_{\text{conv}*}(\mathcal{E}) = 0.$$

(3.5.1.2) *Supposons de plus  $f$  galoisien de groupe  $G$ . Pour  $\mathcal{E} \in \text{Isoc}(X/K)$  on a des isomorphismes canoniques*

- (i)  $\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} (f_{\text{conv}*} f^*(\mathcal{E}))^G$ ,
- (ii)  $H_{\text{conv}}^i(S/K, \mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} H_{\text{conv}}^i(X/K, f^*(\mathcal{E}))^G$ ,
- (iii) *Si  $\mathcal{E} \in F^a\text{-Isoc}(S/K)$ , ces isomorphismes sont compatibles aux Frobenius.*

*Démonstration.*

*Pour (3.5.1.1).* Le (i) est là pour mémoire, car prouvé en [II, 3.4.8]. On a vu dans la démonstration de [loc. cit.] que la définition de  $R^i f_{\text{conv}*}(\mathcal{E})$  est locale



sur  $S$  : on peut donc supposer  $S = \operatorname{Spec} A_0$  affine et lisse sur  $k$ .

Posons  $\mathcal{S} = \operatorname{Spf} \hat{A}$  où  $A$  est une  $\mathcal{V}$ -algèbre lisse relevant  $A_0$ , et relevons  $f : X \rightarrow S$  en un morphisme fini étale de  $\mathcal{V}$ -schémas formels  $h : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{S}$  [EGA IV, (18.3.2) ou (18.3.4)], et soit  $F_{\mathcal{S}} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$  un relèvement du Frobenius de  $S$ . Puisque  $f$  est étale, dans la décomposition classique du Frobenius  $F_X$  de  $X$

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{F_X} & X \\
 \searrow F_{X/S} & \nearrow \pi_{X/S} & \\
 X^{(q)} & \xrightarrow{\pi_{X/S}} & X \\
 \downarrow f^{(q)} & & \downarrow f \\
 S & \xrightarrow{F_S} & S
 \end{array}$$

le morphisme  $F_{X/S}$  est un isomorphisme et se relève de manière unique en un isomorphisme  $F_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}$  s'insérant dans le diagramme commutatif à carré cartésien

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{X} & \xrightarrow{F_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}} & \mathcal{X} \\
 \searrow h & \nearrow \pi_{\mathcal{X}/\mathcal{S}} & \\
 \mathcal{X}^{(q)} & \xrightarrow{\pi_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}} & \mathcal{X} \\
 \downarrow h^{(q)} & & \downarrow h \\
 \mathcal{S} & \xrightarrow{F_{\mathcal{S}}} & \mathcal{S}
 \end{array} .$$

On pose  $F_{\mathcal{X}} = \pi_{\mathcal{X}/\mathcal{S}} \circ F_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}$ .

Pour  $\mathcal{E} \in \operatorname{Isoc}(X/K)$ , soit  $\mathcal{E}_{\mathcal{X}}$  une réalisation de  $\mathcal{E}$  sur  $\mathcal{X}_K$  ; par définition on a

$$\begin{aligned}
 R^i f_{\operatorname{conv}*}(X/\mathcal{S}; \mathcal{E}) &= H^i(\mathbb{R}h_{K*}(\mathcal{E}_{\mathcal{X}} \otimes \Omega_{\mathcal{X}_K/\mathcal{S}_K}^{\bullet})) \\
 &= R^i h_{K*}(\mathcal{E}_{\mathcal{X}}),
 \end{aligned}$$

car  $\mathcal{X}$  est étale sur  $\mathcal{S}$ . D'où le (iii) par le théorème B de Kiehl car  $h$  est affine.

Soit  $\mathcal{E} \in F^a\text{-Isoc}(X/K)$  et  $\phi : F_{\mathcal{X}}^*(\mathcal{E}_{\mathcal{X}}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_{\mathcal{X}}$  le Frobenius. D'après [III, (1.2.3)] il suffit de construire un isomorphisme  $\phi^i$  (de Frobenius) sur  $R^i f_{\operatorname{conv}*}(\mathcal{E})$ , compatible aux connexions. Comme  $F_{\mathcal{S}}$  est plat, le

morphisme de changement de base

$$F_{\mathcal{S}_K}^* R^i f_{\text{conv}*}(X/\mathcal{S}, \mathcal{E}) \rightarrow R^i f_{\text{conv}*}^{(q)}(X^{(q)}/\mathcal{S}, \mathcal{E}) \simeq R^i h_{K*}^{(q)}(\pi_{\mathcal{X}_K/\mathcal{S}_K}^*(\mathcal{E}_{\mathcal{X}}))$$

est un isomorphisme [II, (3.4.4)]; par composition avec les isomorphismes

$$R^i h_{K*}^{(q)}(\pi_{\mathcal{X}_K/\mathcal{S}_K}^*(\mathcal{E}_{\mathcal{X}})) \simeq R^i h_{K*}(F_{\mathcal{X}_K}^*(\mathcal{E}_{\mathcal{X}}))$$

(puisque  $F_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}$  est un isomorphisme)

et

$$R^i h_{K*}(\phi) : R^i h_{K*}(F_{\mathcal{X}_K}^*(\mathcal{E}_{\mathcal{X}})) \simeq R^i h_{K*}(\mathcal{E}_{\mathcal{X}}),$$

on obtient le Frobenius  $\phi^i$  cherché

$$\phi^i : F_{\mathcal{S}_K}^* R^i f_{\text{conv}*}(X/\mathcal{S}, \mathcal{E}) \simeq R^i f_{\text{conv}*}(X/\mathcal{S}, \mathcal{E}).$$

En reprenant la preuve de [II, (3.4.4)] on vérifie que  $\phi^i$  est compatible aux connexions d'où le (ii).

*Pour (3.5.1.2).* Soit  $\mathcal{E}_{\mathcal{S}}$  une réalisation de  $\mathcal{E}$  sur  $\mathcal{S}_K$ . Par définition on a

$$f_{\text{conv}*}(X/\mathcal{S}, f^*(\mathcal{E})) = h_{K*}(h_K^*(\mathcal{E}_{\mathcal{S}})).$$

Comme  $h_K$  est fini étale galoisien de groupe  $G$  [II, (2.3.1)], la flèche canonique

$$\mathcal{E}_{\mathcal{S}} \rightarrow (h_{K*}(h_K^*(\mathcal{E}_{\mathcal{S}})))^G$$

est un isomorphisme, d'où (i).

L'isomorphisme du (ii) est alors une conséquence classique du (i) [Et 2, III, 3.1.1].

La fonctorialité des constructions précédentes prouve le (iii).  $\square$



# IV. Images directes de $F$ -isocristaux surconvergents

## 1. Frobenius

**1.1.** On fixe dans ce paragraphe 1 un entier  $a \in \mathbb{N}^*$  ; on pose  $q = p^a$ . Pour tout  $k$ -schéma  $S$  on notera  $F_S$  le Frobenius de  $S$  induit par la puissance  $q$  sur le faisceau  $\mathcal{O}_S$ .

On fixe un relèvement  $\sigma : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$  de la puissance  $q$  sur  $k$  à la manière de [Et 5, I, 1.1].

Si  $S$  est lisse sur  $k$  et  $e \leq p - 1$ , on notera  $F^a\text{-Isoc}^\dagger(S/K)_{\text{plat}}$  la sous-catégorie pleine de  $F^a\text{-Isoc}^\dagger(S/K)$  formé des objets dont l'image par le foncteur d'oubli

$$F^a\text{-Isoc}^\dagger(S/K) \longrightarrow F^a\text{-Isoc}(S/K)$$

est dans  $F^a\text{-Isoc}(S/K)_{\text{plat}}$ , cf [III, 3.1].

**1.2.** Soit  $S$  un  $k$ -schéma affine et lisse. En utilisant les notations du [I, théo (3.4) (3)] il existe une  $\mathcal{V}$ -algèbre lisse  $A$  telle que  $\text{Spec } A$  relève  $S$  et un  $\mathcal{V}$ -morphisme fini  $\psi$  relevant le Frobenius  $F_S$ , s'insérant dans un diagramme commutatif à carrés cartésiens

$$(1.2.1) \quad \begin{array}{ccccc} \text{Spec } B_T & \longrightarrow & \text{Spec } B & \xrightarrow{j_{Z'}} & Z' \\ \psi_T \downarrow & & \downarrow \psi & & \downarrow \overline{\psi} \\ \text{Spec } A_T & \longrightarrow & \text{Spec } A & \xrightarrow{j_Z} & Z \end{array}$$

où les  $j$  sont des immersions ouvertes,  $\overline{\psi}$  est fini,  $\psi_T$  est fini et plat, et  $Z$  est un  $\mathcal{V}$ -schéma propre, normal.

Soit  $\hat{A}$  le séparé complété  $\mathfrak{m}$ -adique de  $A$  : c'est aussi le séparé complété de  $A_T$ , et on a un isomorphisme [I, théo (3.4) (2) (i)]

$$B_T \otimes_{A_T} \hat{A} \simeq \hat{B} \simeq \hat{A}$$

tel que dans le diagramme commutatif à carrés cartésiens

$$(1.2.2) \quad \begin{array}{ccccccc} & & \rho_B & & & & \\ & \nearrow & & \searrow & & & \\ \text{Spec } \hat{A} & \xrightarrow{\sim} & \text{Spec } \hat{B}_T & \longrightarrow & \text{Spec } B & \xrightarrow{j_{Z'}} & Z' \\ & \searrow \varphi & \downarrow \psi_T & & \downarrow \psi & & \downarrow \bar{\psi} \\ & & \text{Spec } \hat{A}_T = \text{Spec } \hat{A} & \xrightarrow{\rho_A} & \text{Spec } A & \xrightarrow{j_Z} & Z \end{array}$$

$\varphi$  est un relèvement de  $F_S$ .

Le morphisme diagonal  $\text{Spec } \hat{A} \longrightarrow \text{Spec } \hat{A} \times_{\mathcal{V}} \text{Spec } \hat{A}$  est une immersion fermée, donc  $\text{Spec } \hat{A}$  est isomorphe à son image schématique  $\hat{\Delta}$  par ce morphisme. Considérons l'image schématique de  $\hat{\Delta}$  par le morphisme composé

$$\text{Spec } \hat{A} \times_{\mathcal{V}} \text{Spec } \hat{A} \xrightarrow{\rho = \rho_A \times \rho_B} \text{Spec } A \times_{\mathcal{V}} \text{Spec } B \xrightarrow{j_Z \times j_{Z'} = j} \mathcal{Z} \times_{\mathcal{V}} \mathcal{Z}' ;$$

notons  $\Delta$  (resp.  $\mathcal{Z}''$ ) l'image schématique de  $\hat{\Delta}$  (resp. de  $\Delta$ ) par  $\rho_A \times \rho_B$  (resp. par  $j_Z \times j_{Z'}$ ). L'immersion ouverte  $j$  induit une immersion ouverte  $j_Z'' : \Delta \hookrightarrow \mathcal{Z}''$  [EGA I, (5.4.4)].

Montrons que  $\rho(\hat{\Delta}) = \Delta$ . Quitte à décomposer la  $\mathcal{V}$ -algèbre lisse (donc normale)  $A$  en somme de ses composantes connexes, on peut supposer  $A$  intègre, donc intégralement clos : ainsi  $\hat{A}$  est intégralement clos [I, prop (1.6) (4) (iv)]. Soit  $I$  l'idéal de  $\hat{A} \otimes_{\mathcal{V}} \hat{A}$  définissant  $\hat{\Delta} = \text{Spec}(\hat{A} \otimes_{\mathcal{V}} \hat{A}/I)$  : comme  $\hat{A}$  est intègre,  $I$  est un idéal premier. L'image de  $A$  par  $\rho$  est donc l'ensemble des idéaux premiers de  $A \otimes_{\mathcal{V}} B$  contenant  $\rho(I)$  : c'est donc  $\text{Spec}(A \otimes_{\mathcal{V}} B/\tilde{\rho}^{-1}(I))$  où  $\tilde{\rho} : A \otimes_{\mathcal{V}} B \rightarrow \hat{A} \otimes_{\mathcal{V}} \hat{A}$  induit  $\rho$  ; comme c'est déjà un sous-schéma fermé de  $\text{Spec } A \times_{\mathcal{V}} \text{Spec } B$ , il est égal à  $\Delta$ .

En remarquant que  $\rho_n = \rho \bmod \mathfrak{m}^{n+1}$  est l'identité,  $\rho_n$  induit un isomorphisme

$$(\text{Spec } \hat{A} \bmod \mathfrak{m}^{n+1}) \xrightarrow{\sim} (\hat{\Delta} \bmod \mathfrak{m}^{n+1}) \xrightarrow[\rho_n]{\sim} (\Delta \bmod \mathfrak{m}^{n+1}).$$

Notons alors  $\mathcal{S}, \mathcal{Z}, \mathcal{Z}', \mathcal{Z}''$  les schémas formels associés respectivement à  $\text{Spec } \hat{A}, \mathcal{Z}, \mathcal{Z}', \mathcal{Z}''$ . Ce qui précède fournit un diagramme commutatif à carré cartésien

$$(1.2.3) \quad \begin{array}{ccccc} & & \mathcal{Z} & & \\ & \nearrow j_{\mathcal{Z}} & \uparrow v_{\mathcal{Z}} & \nwarrow \text{proj} & \\ & \mathcal{Z}'' & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{Z} \times_{\mathcal{V}} \mathcal{Z}' & \\ & \nearrow j_{\mathcal{Z}''} & \downarrow v_{\mathcal{Z}'} & \nwarrow \text{proj} & \\ \mathcal{S} & \xrightarrow{j_{\mathcal{Z}'}} & \mathcal{Z}' & & \\ \downarrow F_{\mathcal{S}} := \hat{\varphi} & & \downarrow \hat{\psi} := F_{\mathcal{Z}'} & & \\ \mathcal{S} & \xrightarrow{j_{\mathcal{Z}}} & \mathcal{Z} & & \end{array}$$

où  $\mathcal{Z}$  est propre sur  $\mathcal{V}$  et normal, [I, théo (3.4) (3) (ii)],  $\hat{\psi}$  est fini;  $F_{\mathcal{S}}$  est un relèvement fini et plat du Frobenius  $F_{\mathcal{S}}$ ;  $j_{\mathcal{Z}}, j_{\mathcal{Z}'}, j_{\mathcal{Z}''}$  sont des immersions ouvertes induites respectivement par  $j_{\mathcal{Z}}, j_{\mathcal{Z}'}, j_{\mathcal{Z}''}$ ;  $i$  est l'immersion fermée induite par l'immersion fermée  $\mathcal{Z}'' \hookrightarrow \mathcal{Z} \times_{\mathcal{V}} \mathcal{Z}'$ ;  $v_{\mathcal{Z}}, v_{\mathcal{Z}'}$  sont des morphismes propres par composition de morphismes propres.

Avec les notations de [II, (2.3.1) (2)] soit  $V_{\lambda} = \text{Spm } A_{\lambda}$  : il existe  $\lambda_0 > 1$  tel que, pour  $1 < \lambda \leq \lambda_0$ ,  $V_{\lambda}$  est lisse sur  $K$ ; notons  $W'_{\lambda} = F_{\mathcal{Z}'_K}^{-1}(V_{\lambda})$  et  $W''_{\lambda} = v_{\mathcal{Z}'_K}^{-1}(W'_{\lambda})$ .

Puisque  $(V_{\lambda})_{\lambda}$  décrit un système fondamental de voisinages stricts de  $\mathcal{S}_K$  dans  $\mathcal{Z}_K$ , alors  $(W'_{\lambda})_{\lambda}$  décrit un système fondamental de voisinages stricts de  $\mathcal{S}_K$  dans  $\mathcal{Z}'_K$  [II, prop (2.1.2)]. Comme  $v_{\mathcal{Z}'}$  est étale au voisinage de  $\mathcal{S}$ , il existe  $\lambda_1 > 1$  tel que pour tout  $\lambda$ ,  $1 < \lambda \leq \lambda_1 \leq \lambda_0$ , on ait un isomorphisme  $W''_{\lambda} \xrightarrow{\sim} W'_{\lambda}$  induit par  $v_{\mathcal{Z}'}$  [B 3, (1.3.5)]. De même  $v_{\mathcal{Z}}$  qui est étale au voisinage de  $\mathcal{S}$ , induit un isomorphisme entre un système fondamental de voisinages stricts de  $\mathcal{S}_K$  dans  $\mathcal{Z}''_K$  et un système fondamental de voisinages stricts de  $\mathcal{S}_K$  dans  $\mathcal{Z}_K$  : par composition il existe  $\mu$ ,  $1 < \mu \leq \lambda \leq \lambda_1$ , et un morphisme fini  $F_{\lambda\mu}$  rendant cartésien le carré

$$(1.2.4) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{S}_K & \hookrightarrow & V_{\mu} \\ F_{\mathcal{S}_K} \downarrow & & \downarrow F_{\lambda\mu} \\ \mathcal{S}_K & \hookrightarrow & V_{\lambda} \end{array}$$

où les flèches horizontales sont des immersions ouvertes et  $V_{\lambda}$  est lisse sur  $K$ .

## 2. Cas relevable

**Théorème (2.1).** *Soient  $S$  un  $k$ -schéma lisse et séparé et  $f : X \rightarrow S$  un  $k$ -morphisme propre et lisse. On suppose qu'il existe un carré cartésien de  $\mathcal{V}$ -schémas formels*

$$(2.1.1) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \xrightarrow{j_{\overline{\mathcal{X}}}} & \overline{\mathcal{X}} \\ h \downarrow & & \downarrow \overline{h} \\ \mathcal{S} & \xrightarrow{j_{\overline{\mathcal{S}}}} & \overline{\mathcal{S}} \end{array},$$

de réduction mod  $\mathfrak{m}$  égale à

$$(2.1.2) \quad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{j_{\overline{X}}} & \overline{X} \\ f \downarrow & & \downarrow \overline{f} \\ S & \xrightarrow{j_{\overline{S}}} & \overline{S} \end{array},$$

où  $\overline{\mathcal{S}}$  est propre sur  $\mathcal{V}$ ,  $\overline{h}$  est propre,  $h$  est propre et lisse et les  $j$  sont des immersions ouvertes.

Soit  $E \in F^a\text{-Isoc}^\dagger(X/K)$  et  $\hat{E} = \mathcal{E}$  son image dans  $F^a\text{-Isoc}(X/K)$ . Alors, pour tout entier  $i \geq 0$

- (1)  $E_i := R^i f_{\text{rig}*}(X/\overline{\mathcal{S}}, E) \in F^a\text{-Isoc}^\dagger(S/K)$
- (2) Soient  $\hat{E}_i = j_{\overline{\mathcal{S}}}^*(E_i)$ ,  $\mathcal{E}_i = R^i f_{\text{conv}*}(X/\mathcal{S}, \mathcal{E})$  et  $\phi_{E_i} : F_S^* E_i \rightarrow E_i$ ,  $\phi_{\mathcal{E}_i} : F_S^* \mathcal{E}_i \rightarrow \mathcal{E}_i$  les isomorphismes de Frobenius. Le diagramme commutatif d'isomorphismes ci-dessous définit  $\phi_{\hat{E}_i}$  et permet les identifications canoniques

$$j_{\overline{\mathcal{S}}}^*(\phi_{E_i}) = \phi_{\hat{E}_i} = \phi_{\mathcal{E}_i}$$

$$\begin{array}{ccc} j_{\overline{\mathcal{S}}}^* F_S^* R^i f_{\text{rig}*}(X/\overline{\mathcal{S}}, E) & \xrightarrow[\sim]{j_{\overline{\mathcal{S}}}^*(\phi_{E_i})} & j_{\overline{\mathcal{S}}}^* R^i f_{\text{rig}*}(X/\overline{\mathcal{S}}, E) \\ \downarrow \simeq & & \parallel \\ F_S^* j_{\overline{\mathcal{S}}}^* R^i f_{\text{rig}*}(X/\overline{\mathcal{S}}, E) & \xrightarrow[\sim]{\phi_{\hat{E}_i}} & j_{\overline{\mathcal{S}}}^* R^i f_{\text{rig}*}(X/\overline{\mathcal{S}}, E) \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ F_S^* R^i f_{\text{conv}*}(X/\mathcal{S}, \mathcal{E}) & \xrightarrow[\sim]{\phi_{\mathcal{E}_i}} & R^i f_{\text{conv}*}(X/\mathcal{S}, \mathcal{E}). \end{array}$$

*Démonstration.* L'image inverse  $F_\sigma^* E_i$  par Frobenius s'obtient [B 3, (2.3.7)] en appliquant le foncteur de changement de base

$$\sigma^* : \text{Isoc}^\dagger(S/K) \longrightarrow \text{Isoc}^\dagger(S^{(q)}/K)$$

puis le foncteur image inverse par le Frobenius  $F_{S/k} : S \rightarrow S^{(q)}$ .

Comme  $\sigma$  est fixé on notera  $F_\sigma^* E = F_S^* E$ . Il nous reste donc à définir l'isomorphisme de Frobenius  $\phi_{E_i}$  de  $E_i$ .

Quitte à décomposer  $S$  en somme de ses composantes connexes il suffit de définir  $\phi_{E_i}$  sur chacune de ces composantes connexes. Soit  $S_\alpha$  un ouvert affine d'une composante connexe  $S_0$  de  $S$  : comme le foncteur

$$F^a\text{-Isoc}^\dagger(S_0/K) \longrightarrow F^a\text{-Isoc}^\dagger(S_\alpha/K)$$

est pleinement fidèle [Et 5, théo 4], il suffit de définir  $\phi_{E_i}$  sur  $S_\alpha$ .

Soit  $j_{s_\alpha} : S_\alpha = \text{Spec } A_0 \hookrightarrow S$  l'immersion ouverte et  $A$  une  $\mathcal{V}$ -algèbre lisse relevant  $A_0$ . D'après (1.2.3) on a un diagramme commutatif de  $\mathcal{V}$ -schémas formels de type fini, à carré cartésien

$$(2.1.3) \quad \begin{array}{ccc} & & \overline{\mathcal{S}}_\alpha \\ & \nearrow j_{\overline{\mathcal{S}}_\alpha} & \nearrow v_{\overline{\mathcal{S}}_\alpha} \\ & \overline{\mathcal{S}}''_\alpha & \\ & \downarrow v_{\overline{\mathcal{S}}'_\alpha} & \\ S_\alpha & \xrightarrow{j_{\overline{\mathcal{S}}'_\alpha}} & \overline{\mathcal{S}}'_\alpha \\ \downarrow F_\alpha & & \downarrow \overline{F}_\alpha \\ S_\alpha & \xrightarrow{j_{\overline{\mathcal{S}}_\alpha}} & \overline{\mathcal{S}}_\alpha \end{array}$$

où  $\mathcal{S}_\alpha = \text{Spf } \hat{A}$ ,  $\overline{\mathcal{S}}_\alpha$  est propre sur  $\mathcal{V}$ ,  $v_{\overline{\mathcal{S}}'_\alpha}$  et  $v_{\overline{\mathcal{S}}_\alpha}$  sont propres,  $F_\alpha$  est un relèvement fini et plat du Frobenius  $F_{S_\alpha}$  de  $S_\alpha$ ,  $\overline{F}_\alpha$  est fini et les  $j$  sont des immersions ouvertes. Notons  $j_{\overline{\mathcal{T}}_\alpha} : \mathcal{T}_\alpha := \mathcal{S}_\alpha \times_{\mathcal{V}} \mathcal{S} \longrightarrow \overline{\mathcal{T}}_\alpha := \overline{\mathcal{S}}_\alpha \times_{\mathcal{V}} \overline{\mathcal{S}}$  l'immersion ouverte et  $\overline{u}_\alpha : \overline{\mathcal{T}}_\alpha \longrightarrow \overline{\mathcal{S}}_\alpha$ ,  $\overline{v}_\alpha : \overline{\mathcal{T}}_\alpha \longrightarrow \overline{\mathcal{S}}$  les projections ; soient  $\overline{T}_\alpha$  (resp.  $T_\alpha$ ) la réduction de  $\overline{\mathcal{T}}_\alpha$  (resp.  $\mathcal{T}_\alpha$ ) mod  $\mathfrak{m}$  et  $\tilde{S}_\alpha$  l'image schématique de  $S_\alpha$  plongé diagonalement dans  $\overline{T}_\alpha$  :



$$S_\alpha \xrightarrow{j_{\tilde{S}_\alpha}} \tilde{S}_\alpha \xrightarrow{i_{\tilde{T}_\alpha}} \overline{T}_\alpha \xrightarrow{i_{\tilde{T}_\alpha}} \overline{T}_\alpha$$

$i_{\tilde{S}_\alpha}$

$j_{\tilde{S}_\alpha}$  est une immersion ouverte et les  $i$  des immersions fermées. On a alors un diagramme commutatif à carrés verticaux cartésiens

(2.1.4)

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & X & \xrightarrow{j_{\overline{X}}} & \overline{X} & \xrightarrow{i_{\overline{X}}} & \overline{\mathcal{X}} \\
 & \nearrow j_{X_\alpha} & \downarrow f & & \downarrow \overline{f} & & \downarrow \overline{h} \\
 & & S & \xrightarrow{j_{\overline{S}}} & \overline{S} & \xrightarrow{i_{\overline{S}}} & \overline{\mathcal{S}} \\
 & \nearrow j_{S_\alpha} & \downarrow f_\alpha & & \downarrow \overline{f}_\alpha & & \downarrow \overline{h}_\alpha \\
 X_\alpha & \xrightarrow{id} & \tilde{X}_\alpha & \xrightarrow{j_{\tilde{S}_\alpha}} & \overline{X} & \xrightarrow{i_{\overline{X}}} & \overline{\mathcal{X}} \\
 \downarrow f_\alpha & \nearrow id & \downarrow & & \downarrow id & & \downarrow \overline{h} \\
 S_\alpha & \xrightarrow{j_{\tilde{S}_\alpha}} & \tilde{S}_\alpha & \xrightarrow{j_{\tilde{T}_\alpha}} & \overline{T}_\alpha & \xrightarrow{i_{\tilde{T}_\alpha}} & \overline{\mathcal{T}}_\alpha \\
 & \nearrow id & \downarrow & & \downarrow \overline{v}_\alpha & & \downarrow \overline{h}_\alpha \\
 & & \tilde{Y}_\alpha & \xrightarrow{id} & \overline{Y}_\alpha & \xrightarrow{id} & \overline{\mathcal{Y}}_\alpha \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \tilde{T}_\alpha & \xrightarrow{id} & \overline{T}_\alpha & \xrightarrow{id} & \overline{\mathcal{T}}_\alpha
 \end{array}$$

Ainsi on a une suite d'isomorphismes

$$\begin{aligned}
 (2.1.5) \quad & j_{S_\alpha}^* R^i f_{\text{rig}*}(X/\overline{\mathcal{S}}, E) \xrightarrow{\sim} R^i f_{\text{arig}*}(X_\alpha/\overline{\mathcal{S}}, j_{X_\alpha}^* E) \text{ [II, théo(3.4.4)]} \\
 & \simeq \overline{v}_{\alpha_K}^* R^i f_{\text{arig}*}(X_\alpha/\overline{\mathcal{S}}, j_{X_\alpha}^* E) \text{ [B 3, (2.3.6), (2.3.2) (iv)]} \\
 & \xrightarrow{\sim} R^i f_{\text{arig}*}(X_\alpha/\overline{\mathcal{T}}_\alpha, j_{X_\alpha}^* E) \text{ [II, théo (3.4.4)].}
 \end{aligned}$$

On est donc ramené à construire un isomorphisme de Frobenius sur

$$R^i f_{\text{arig}*}(X_\alpha/\overline{\mathcal{T}}_\alpha, j_{X_\alpha}^* E) \in \text{Isoc}^\dagger(S_\alpha/K).$$

A partir du carré commutatif

$$\begin{array}{ccc}
T_\alpha & \xrightarrow{j_{\overline{T}'_\alpha}} & \overline{T}'_\alpha := \overline{S}'_\alpha \times_{\mathcal{V}} \overline{S} \\
F_{T_\alpha} := F_\alpha \times 1 \downarrow & & \downarrow \overline{F}_\alpha \times 1 := F_{\overline{T}'_\alpha} \\
T_\alpha & \xrightarrow{j_{\overline{T}_\alpha}} & \overline{T}_\alpha = \overline{S}_\alpha \times_{\mathcal{V}} \overline{S}
\end{array} \quad ,$$

déduit de (2.1.3), et du carré cartésien

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{Y}_\alpha & \hookrightarrow & \overline{\mathcal{Y}}_\alpha \\
h_\alpha \downarrow & & \downarrow \overline{h}_\alpha \\
T_\alpha & \xrightarrow{j_{\overline{T}_\alpha}} & \overline{T}_\alpha
\end{array} \quad ,$$

où les flèches  $j$  sont des immersions ouvertes, on forme les diagrammes commutatifs à carrés cartésiens

(2.1.6)

$$\begin{array}{ccccccc}
& & X_\alpha & \xrightarrow{\quad} & Y_\alpha & \hookrightarrow & \mathcal{Y}_\alpha & \xrightarrow{\quad} & \overline{\mathcal{Y}}_\alpha \\
& \nearrow & \vdots f_\alpha & \nearrow & \vdots & \nearrow & \vdots h_\alpha & \nearrow & \vdots \overline{h}_\alpha \\
X_\alpha^{(q/S_\alpha)} & \xrightarrow{\quad} & Y'_\alpha & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{Y}'_\alpha & \xrightarrow{\quad} & \overline{\mathcal{Y}}'_\alpha & & \\
\downarrow f_\alpha^{(q)} & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
S_\alpha & \xrightarrow{\quad} & T_\alpha & \xrightarrow{\quad} & \overline{T}_\alpha & \xrightarrow{\quad} & \overline{T}'_\alpha & & \\
\nearrow F_{S_\alpha} & & \nearrow F_{S_\alpha \times 1} & & \nearrow F_{T_\alpha} & & \nearrow F_{\overline{T}'_\alpha} & & \\
S_\alpha & \xrightarrow{i_\alpha} & T_\alpha & \xrightarrow{i_{T_\alpha}} & \overline{T}_\alpha & \xrightarrow{j_{\overline{T}'_\alpha}} & \overline{T}'_\alpha & & 
\end{array}$$

(où  $i_\alpha$  et  $i_{T_\alpha}$  sont des immersions fermées), et

(2.1.7)

$$\begin{array}{ccccc}
 & X_\alpha & \xrightarrow{j_{\tilde{X}_\alpha}} & \tilde{X}_\alpha & \longrightarrow & \bar{Y}_\alpha \\
 & \uparrow \pi_{X_\alpha} & & \uparrow \tilde{f}_\alpha & & \uparrow \\
 X_\alpha^{(q/S_\alpha)} & \xrightarrow{\quad} & \tilde{X}'_\alpha & \longrightarrow & \bar{Y}'_\alpha & \\
 \downarrow f_\alpha^{(q)} & & \downarrow \tilde{f}'_\alpha & & \downarrow \bar{h}'_\alpha & \\
 S_\alpha & \xrightarrow{j_{\tilde{S}_\alpha}} & \tilde{S}'_\alpha & \longrightarrow & \bar{T}'_\alpha & \\
 \uparrow F_{S_\alpha} & & \uparrow \tilde{F}_\alpha & & \uparrow F_{\bar{T}'_\alpha} & \\
 S_\alpha & \xrightarrow{j_{\tilde{S}'_\alpha}} & \tilde{S}'_\alpha & \xrightarrow{i_{\tilde{S}'_\alpha}} & \bar{T}'_\alpha &
 \end{array}$$

D'après [II, théo (3.4.4)] on a un isomorphisme

(2.1.8) 
$$F_{S_\alpha}^* R^i f_{\alpha \text{ rig}^*}(X_\alpha/\bar{T}_\alpha, j_{X_\alpha}^* E) \xrightarrow{\sim} R^i f_{\alpha \text{ rig}^*}^{(q)}(X_\alpha^{(q/S_\alpha)}/\bar{T}'_\alpha, \pi_{X_\alpha}^* j_{X_\alpha}^* E).$$

Notons  $v_{\bar{T}_\alpha} := v_{\bar{S}_\alpha} \times 1_{\bar{S}} : \bar{T}_\alpha'' = \bar{S}_\alpha'' \times_{\mathcal{V}} \bar{S} \rightarrow \bar{T}_\alpha = \bar{S}_\alpha \times_{\mathcal{V}} \bar{S}$  et  $v_{\bar{T}'_\alpha} := v_{\bar{S}'_\alpha} \times 1_{\bar{S}} : \bar{T}_\alpha'' = \bar{S}_\alpha'' \times_{\mathcal{V}} \bar{S} \rightarrow \bar{T}'_\alpha = \bar{S}'_\alpha \times_{\mathcal{V}} \bar{S}$ ; de (2.1.3) on déduit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & \bar{T}_\alpha \\
 & & & \nearrow j_{\bar{T}_\alpha} & \\
 S_\alpha & \longrightarrow & T_\alpha & \xrightarrow{j_{\bar{T}_\alpha''}} & \bar{T}_\alpha'' \\
 & & \searrow j_{\bar{T}'_\alpha} & & \downarrow v_{\bar{T}'_\alpha} \\
 & & & & \bar{T}'_\alpha
 \end{array}$$

où les  $j$  sont des immersions ouvertes et  $S_\alpha \rightarrow T_\alpha$  une immersion.

On a un diagramme commutatif dont les carrés verticaux sont cartésiens, de même que le carré horizontal (1) en bas à droite

$$(2.1.9) \quad \begin{array}{ccccc} & X(q/S_\alpha) \subset & \tilde{X}'_\alpha & \longrightarrow & \bar{Y}'_\alpha \\ & \text{id} \nearrow & \uparrow \tilde{f}'_\alpha & & \uparrow \\ X(q/S_\alpha) \subset & \longrightarrow & \tilde{X}''_\alpha & \longrightarrow & \bar{Y}''_\alpha \\ \downarrow f_\alpha^{(q)} & & \downarrow \tilde{f}''_\alpha & & \downarrow \bar{h}'_\alpha \\ & S_\alpha \subset & \tilde{S}'_\alpha & \xrightarrow{i_{\tilde{S}'_\alpha}} & \bar{T}'_\alpha \\ & \text{id} \nearrow & \uparrow j_{\tilde{S}'_\alpha} & & \uparrow v_{\bar{T}'_\alpha} \\ S_\alpha & \xrightarrow{j_{\tilde{S}''_\alpha}} & \tilde{S}''_\alpha & \xrightarrow{i_{\tilde{S}''_\alpha}} & \bar{T}''_\alpha \end{array} \quad \textcircled{1}$$

D'après [II, (3.4.4)],  $v_{\bar{T}'_\alpha K}^*$  induit un isomorphisme

$$(2.1.10) \quad R^i f_{\alpha \text{ rig}}^{(q)}(X_\alpha^{(q/S_\alpha)}/\bar{T}'_\alpha, \pi_{X_\alpha}^* j_{X_\alpha}^* E) \xrightarrow{\sim} R^i f_{\alpha \text{ rig}}^{(q)}(X(q/S_\alpha)/\bar{T}''_\alpha, \pi_{X_\alpha}^* j_{X_\alpha}^* E) :$$

en effet on peut appliquer [loc.cit.] car le morphisme propre  $v_{\bar{T}'_\alpha}$ , étant étale au voisinage de  $S_\alpha$ , il induit [B 3, (1.3.5)] un isomorphisme entre un voisinage strict de  $]S_\alpha[_{\bar{T}'_\alpha}$  dans  $\bar{T}''_\alpha$  et un voisinage strict de  $]S_\alpha[_{\bar{T}'_\alpha}$  dans  $\bar{T}'_\alpha$ .

Notons  $\bar{T}''_\alpha$  la réduction de  $\bar{T}'_\alpha$  mod  $\mathfrak{m}$ ,  $v_{\bar{T}''_\alpha}$  la réduction de  $v_{\bar{T}'_\alpha}$  mod  $\mathfrak{m}$  et  $\tilde{S}''_\alpha$  l'adhérence schématique de  $S_\alpha$  dans  $\bar{T}''_\alpha$ ; on a un diagramme commutatif où les carrés  $\textcircled{1}$  et  $\textcircled{2}$  sont cartésiens

$$(2.1.11) \quad \begin{array}{ccccccc} & & \tilde{S}''_\alpha & & & & \\ & \nearrow i' & & \searrow i'' & & & \\ & \tilde{S}'''_\alpha & & & & & \\ & \nearrow j_{\tilde{S}'''_\alpha} & & \searrow i''' & & & \\ S_\alpha & \xrightarrow{j_{\tilde{S}_\alpha}} & \tilde{S}_\alpha & \xrightarrow{i_{\bar{T}_\alpha}} & \bar{T}_\alpha & \xrightarrow{i_{\bar{T}''_\alpha}} & \bar{T}''_\alpha \\ & & \downarrow v_{\tilde{S}_\alpha} & \textcircled{1} & \downarrow v_{\bar{T}_\alpha} & \textcircled{2} & \downarrow v_{\bar{T}''_\alpha} \\ & & \tilde{S}_\alpha & & \bar{T}_\alpha & & \bar{T}''_\alpha \end{array}$$

où les  $j$  (resp. les  $i$ ) sont des immersions ouvertes (resp. fermées). Posons  $v_\alpha = v_{\tilde{S}_\alpha} \circ i'''$ .

Soit  $\tilde{f}'''_\alpha : \tilde{X}'''_\alpha \rightarrow \tilde{S}'''_\alpha$  l'image inverse de  $\tilde{f}''_\alpha : \tilde{X}''_\alpha \rightarrow \tilde{S}''_\alpha$  par  $i' : \tilde{S}'''_\alpha \hookrightarrow \tilde{S}''_\alpha$ . On a un diagramme commutatif

$$(2.1.12) \quad \begin{array}{ccccc} X(q/S_\alpha) & \hookrightarrow & \tilde{X}'''_\alpha & \hookrightarrow & \overline{Y}''_\alpha \\ f_\alpha^{(q)} \downarrow & & \downarrow \tilde{f}'''_\alpha & & \downarrow \overline{h}''_\alpha \\ S_\alpha & \xhookrightarrow{j_{\tilde{S}'''_\alpha}} & \tilde{S}'''_\alpha & \xrightarrow{i_{\tilde{S}'''_\alpha}} & \overline{T}''_\alpha \\ \parallel & & \downarrow i_\tau & & \downarrow v_{\overline{T}''_\alpha} \\ S_\alpha & \xhookrightarrow{j_{\tilde{S}_\alpha}} & \tilde{S}_\alpha & \xrightarrow{i_{\tilde{S}_\alpha}} & \overline{T}_\alpha \end{array}$$

où les  $j$  (resp. les  $i$ ) sont des immersions ouvertes (resp. fermées). Comme  $v_{\overline{T}_\alpha}$  est étale au voisinage de  $S_\alpha$  et que  $v_\alpha$  est propre on déduit de [B 3, théo (1.3.5)] que  $v_{\overline{T}_{\alpha K}}$  induit un isomorphisme entre un voisinage strict de  $]S_\alpha[_{\overline{T}''_\alpha}$  dans  $]\tilde{S}'''_\alpha[_{\overline{T}''_\alpha}$  et un voisinage strict de  $]S_\alpha[_{\overline{T}_\alpha}$  dans  $]\tilde{S}_\alpha[_{\overline{T}_\alpha}$ . Par suite [II, théo (3.4.4)]  $v_{\overline{T}_{\alpha K}}$  induit un isomorphisme

$$(2.1.13) \quad R^i f_{\alpha \text{ rig}}^{(q)}(X_\alpha^{(q/S_\alpha)}/\overline{T}''_\alpha, \pi_{X_\alpha}^* j_{X_\alpha}^* E) \xrightarrow{\sim} R^i f_{\alpha \text{ rig}}^{(q)}(X^{(q/S_\alpha)}/\overline{T}_\alpha, \pi_{X_\alpha}^* j_{X_\alpha}^* E).$$

Par composition des isomorphismes (2.1.8), (2.1.10) et (2.1.13) on obtient un isomorphisme induit par  $\pi_{X_\alpha} : X_\alpha^{(q/S_\alpha)} \rightarrow X_\alpha$

$$(2.1.14) \quad \begin{array}{ccc} F_{S_\alpha}^* R^i f_{\alpha \text{ rig}}^*(X_\alpha/\overline{T}_\alpha; j_{X_\alpha}^* E) & \xrightarrow{\sim} & R^i f_{\alpha \text{ rig}}^{(q)}(X^{(q/S_\alpha)}/\overline{T}_\alpha; \pi_{X_\alpha}^* j_{X_\alpha}^* E) \\ \downarrow \simeq & & \\ F_{\overline{T}_{\alpha K}}^* R^i f_{\alpha \text{ rig}}^*(X_\alpha/\overline{T}_\alpha; j_{X_\alpha}^* E). & & \end{array}$$

Si l'on prend l'image inverse de cet isomorphisme par  $j_{\overline{T}_\alpha} : \mathcal{T}_\alpha \rightarrow \overline{T}_\alpha$ , on voit aisément en suivant les diagrammes précédents que l'on obtient l'isomorphisme en cohomologie convergente, induit par  $\pi_{X_\alpha}$  :

$$(2.1.15) \quad F_{S_\alpha}^* R^i f_{\alpha \text{ conv}}^*(X_\alpha/\mathcal{T}_\alpha, j_{X_\alpha}^* \mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} R^i f_{\alpha \text{ conv}}^{(q)}(X^{(q/S_\alpha)}/\mathcal{T}_\alpha, \pi_{X_\alpha}^* j_{X_\alpha}^* \mathcal{E})$$

où l'on a, comme pour (2.1.5), un isomorphisme

$$(2.1.16) \quad j_{S_\alpha}^* R^i f_{\text{conv}}^*(X/\mathcal{S}, \mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} R^i f_{\alpha \text{ conv}}^*(X_\alpha/\mathcal{T}_\alpha, j_{X_\alpha}^* \mathcal{E}).$$

Si  $F_{\tilde{S}_\alpha}$  désigne le Frobenius (puissance  $q$ ) de  $\tilde{S}_\alpha$ , on notera  $\tilde{X}_\alpha^{(q/\tilde{S}_\alpha)}$  le produit fibré défini par le diagramme à carré cartésien

$$\begin{array}{ccccc}
 & & F_{\tilde{X}_\alpha} & & \\
 & \swarrow & \text{---} & \searrow & \\
 \tilde{X}_\alpha & \xrightarrow{F_{\tilde{X}_\alpha/\tilde{S}_\alpha}} & \tilde{X}_\alpha^{(q/\tilde{S}_\alpha)} & \xrightarrow{\pi_{\tilde{X}_\alpha}} & \tilde{X}_\alpha \\
 & \searrow \tilde{f}_\alpha & \downarrow \tilde{f}_\alpha^{(q)} & & \downarrow \tilde{f}_\alpha \\
 & & \tilde{S}_\alpha & \xrightarrow{F_{\tilde{S}_\alpha}} & \tilde{S}_\alpha \\
 & & \downarrow i_{\tilde{S}_\alpha} & & \\
 & & \overline{\mathcal{T}}_\alpha & & .
 \end{array}$$

Le calcul de  $R^i f_{\alpha \text{ rig}}^{(q)}(X^{(q/S_\alpha)}/\overline{\mathcal{T}}_\alpha; \pi_{X_\alpha}^* j_{X_\alpha}^* E)$  étant indépendant de la compactification de  $X^{(q/S_\alpha)}$  choisie [B 5, (3.1.11), (3.1.12), (3.2.3)], nous choisirons dorénavant  $\tilde{X}_\alpha^{(q/\tilde{S}_\alpha)}$  [C-T, § 10] comme compactification de  $X^{(q/s_\alpha)}$  au lieu de  $\tilde{X}_\alpha'''$ . Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 X_\alpha & \xrightarrow{F_{X_\alpha/S_\alpha}} & X_\alpha^{(q/S_\alpha)} \\
 j_{\tilde{X}_\alpha} \downarrow & & \downarrow \\
 \tilde{X}_\alpha & \xrightarrow{F_{\tilde{X}_\alpha/\tilde{S}_\alpha}} & \tilde{X}_\alpha^{(q/\tilde{S}_\alpha)} \\
 i_{\tilde{S}_\alpha} \circ \tilde{f}_\alpha \downarrow & & \downarrow i_{\tilde{S}_\alpha} \circ \tilde{f}_\alpha^{(q)} \\
 \overline{\mathcal{T}}_\alpha & \xlongequal{\quad} & \overline{\mathcal{T}}_\alpha;
 \end{array}$$

$F_{X_\alpha/S_\alpha}$  définit par functorialité [B 5, (3.1.11) (ii), (3.1.12) (i)] ou [C-T, (10.5.2)] un morphisme

(2.1.17)

$$\begin{array}{ccc}
 F_{X_\alpha/S_\alpha}^* : R^i f_{\alpha \text{ rig}}^{(q)}(X^{(q/S_\alpha)}/\overline{\mathcal{T}}_\alpha; \pi_{X_\alpha}^* j_{X_\alpha}^* E) & \longrightarrow & R^i f_{\alpha \text{ rig}}^*(X_\alpha/\overline{\mathcal{T}}_\alpha; F_{X_\alpha/S_\alpha}^* \pi_{X_\alpha}^* j_{X_\alpha}^* E) \\
 & & \downarrow \simeq \\
 R^i f_{\alpha \text{ rig}}^*(X_\alpha/\overline{\mathcal{T}}_\alpha; j_{X_\alpha}^* F_X^* E) & \xrightarrow{\quad \simeq \quad} & R^i f_{\alpha \text{ rig}}^*(X_\alpha/\overline{\mathcal{T}}_\alpha; F_{X_\alpha}^* j_{X_\alpha}^* E).
 \end{array}$$

Par image inverse par  $j_{\overline{\mathcal{T}}_\alpha} : \mathcal{T}_\alpha \hookrightarrow \overline{\mathcal{T}}_\alpha$  il fournit le morphisme en cohomologie convergente, induit par  $F_{X_\alpha/S_\alpha}$

$$(2.1.18) \quad F_{X_\alpha/S_\alpha}^* : R^i f_{\alpha \text{ conv}}^{(q)*}(X^{(q/S_\alpha)}/\mathcal{T}_\alpha, \pi_{X_\alpha}^* j_{X_\alpha}^* \mathcal{E}) \rightarrow R^i f_{\alpha \text{ conv}}^*(X_\alpha/\mathcal{T}_\alpha, F_{X_\alpha}^* j_{X_\alpha}^* \mathcal{E}).$$

Enfin, l'isomorphisme de Frobenius de  $E, \phi_E : F_X^* \xrightarrow{\sim} E$ , fournit par fonctorialité un isomorphisme

$$(2.1.19) \quad R^i f_{\alpha \text{ rig}}^*(X_\alpha/\overline{\mathcal{T}}_\alpha, j_{X_\alpha}^* F_X^* E) \xrightarrow{\sim} R^i f_{\alpha \text{ rig}}^*(X_\alpha/\overline{\mathcal{T}}_\alpha, j_{X_\alpha}^* \mathcal{E}),$$

dont l'image inverse par  $j_{\overline{\mathcal{T}}_\alpha} : \mathcal{T}_\alpha \rightarrow \overline{\mathcal{T}}_\alpha$  est l'isomorphisme induit en cohomologie convergente par  $\phi_{\mathcal{E}} : F_X^* \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}$ ,

$$(2.1.20) \quad R^i f_{\alpha \text{ conv}}^*(X_\alpha/\mathcal{T}_\alpha, j_{X_\alpha}^* F_X^* \mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} R^i f_{\alpha \text{ conv}}^*(X_\alpha/\mathcal{T}_\alpha, j_{X_\alpha}^* \mathcal{E}).$$

En composant les morphismes (2.1.14), (2.1.17) et (2.1.19) [resp. (2.1.15), (2.1.18) et (2.1.20)] on obtient le morphisme de Frobenius souhaité

$$(2.1.21) \quad \phi_{E_{\alpha_i}} : F_{S_\alpha}^* R^i f_{\alpha \text{ rig}}^*(X_\alpha/\overline{\mathcal{T}}_\alpha, j_{X_\alpha}^* E) \rightarrow R^i f_{\alpha \text{ rig}}^*(X_\alpha/\overline{\mathcal{T}}_\alpha, j_{X_\alpha}^* E)$$

[resp.

$$(2.1.22) \quad \phi_{\mathcal{E}_{\alpha_i}} : F_{S_\alpha}^* R^i f_{\alpha \text{ conv}}^*(X_\alpha/\mathcal{T}_\alpha, j_{X_\alpha}^* \mathcal{E}) \rightarrow R^i f_{\alpha \text{ conv}}^*(X_\alpha/\mathcal{T}_\alpha, j_{X_\alpha}^* \mathcal{E})$$

qui est l'image inverse de  $\phi_{E_{\alpha_i}}$  par  $j_{\overline{\mathcal{T}}_\alpha}$ ].

D'après le [III, théo (3.3.1)]  $\phi_{\mathcal{E}_{\alpha_i}}$  est un isomorphisme : nous allons en déduire que  $\phi_{E_{\alpha_i}}$  est un isomorphisme, ce qui achèvera la preuve du théorème.

On a un diagramme commutatif

$$(2.1.23) \quad \begin{array}{ccccc} & & \tilde{S}_\alpha & & \\ & \nearrow j_{\tilde{S}_\alpha} & \downarrow i_{\overline{\mathcal{T}}_\alpha} & \searrow i_{\tilde{S}_\alpha} & \\ S_\alpha & & \overline{\mathcal{T}}_\alpha & \xrightarrow{i_{\overline{\mathcal{T}}_\alpha}} & \overline{\mathcal{T}}_\alpha \\ & \searrow j_{\overline{S}_\alpha} & \downarrow \overline{u}'_\alpha & & \downarrow \overline{u}_\alpha \\ & & \overline{S}_\alpha & \xrightarrow{i_{\overline{S}_\alpha}} & \overline{S}_\alpha \end{array}$$

où  $j_{\overline{S}_\alpha}$  (resp.  $\overline{u}'_\alpha$ ) est la réduction mod  $\mathfrak{m}$  de  $j_{S_\alpha} : S_\alpha \hookrightarrow \overline{S}_\alpha$  (resp. de  $\overline{u}_\alpha : \overline{\mathcal{T}}_\alpha \rightarrow \overline{S}_\alpha$ ) : les  $j$  (resp. les  $i$ ) sont des immersions ouvertes (resp. fermées).

De même le triangle commutatif

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{T}_\alpha = \mathcal{S}_\alpha \times_{\mathcal{V}} \mathcal{S} & \\ \Delta \nearrow & \downarrow u_\alpha & \\ \mathcal{S}_\alpha & \xrightarrow{\text{id}} & \mathcal{S}_\alpha \end{array}$$

où  $\Delta$  est le morphisme diagonal et  $u_\alpha$  la projection ( $u_\alpha$  est lisse), fournit un triangle commutatif

$$(2.1.24) \quad \begin{array}{ccc} & \mathcal{T}_\alpha & \\ i' \nearrow & \downarrow u_\alpha & \\ \mathcal{S}_\alpha & \xrightarrow{i} & \mathcal{S}_\alpha \end{array}$$

où  $i$  et  $i'$  sont des immersions fermées.

D'après [B 3, (2.3.1)] le foncteur  $u_{\alpha_K}^*$  induit une auto-équivalence de la catégorie  $F^a\text{-Isoc}(\mathcal{S}_\alpha/K)$  : en composant un foncteur quasi-inverse canonique à  $u_K^*$  (cf. [B 5, (3.1.10)]) avec l'équivalence de catégories du [III, cor (1.2.3)] on constate que la donnée de l'isomorphisme  $\phi_{\mathcal{E}_{\alpha_i}}$  correspond à la donnée d'un isomorphisme

$$\phi_{\mathcal{M}} : \mathcal{M}^\sigma \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}$$

de  $\hat{A}_K$ -modules projectifs de type fini commutant aux connexions.

De même, d'après [B 3, (2.3.5)] le morphisme propre  $v$  de (2.1.23) induit l'auto-équivalence  $v^* = \overline{u}_{\alpha_k}^*$  de  $\text{Isoc}^\dagger(\mathcal{S}_\alpha/K)$  : en composant un foncteur quasi-inverse à  $v^*$  avec l'équivalence de catégories de [B 3, (2;5;2) (ii)], on constate que la donnée du morphisme  $\phi_{E_{\alpha_i}}$  correspond à la donnée d'un morphisme

$$\phi_M : M^\sigma \longrightarrow M$$

de  $A_K^\dagger$ -modules projectifs de type fini commutant aux connexions.

Ce qui précède peut être formalisé par un diagramme commutatif de foncteurs entre catégories



$$(2.1.25) \quad \begin{array}{ccccc} \mathrm{Conn}^\dagger(A_K^\dagger) & \xleftarrow[\simeq]{\Gamma(\overline{\mathcal{S}}_{\alpha K}, -)} & \mathrm{Isoc}^\dagger(S_\alpha/K) & \xrightarrow[\simeq]{\overline{u}_{\alpha K}^*} & \mathrm{Isoc}^\dagger(S_\alpha/K) \\ \downarrow \mathcal{G} & & \downarrow j_{\overline{\mathcal{S}}_{\alpha K}}^* & & \downarrow j_{\overline{\mathcal{T}}_{\alpha K}}^* \\ \mathrm{Conn}^\wedge(\hat{A}_K) & \xleftarrow[\simeq]{\Gamma(\mathcal{S}_{\alpha K}, -)} & \mathrm{Isoc}(S_\alpha/K) & \xrightarrow[\simeq]{u_{\alpha K}^*} & \mathrm{Isoc}(S_\alpha/K) \end{array}$$

où les flèches verticales sont les foncteurs d'oubli et les flèches horizontales des équivalences de catégories : pour les notations et résultats cf. [III, (1.1) et prop. (1.2.1)]. Ainsi on a un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}(\phi_M) : \mathcal{G}(M)^\sigma & \longrightarrow & \mathcal{G}(M) \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ \phi_M : \mathcal{M}^\sigma & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{M} , \end{array}$$

donc  $\mathcal{G}(\phi_M)$  est un isomorphisme : par fidèle platitude de  $\hat{A}_K$  sur  $A_K^\dagger$  on en déduit que  $\phi_M$  est un isomorphisme. Par suite  $\phi_{E_{\alpha_i}}$  est un isomorphisme.  $\square$

**Remarque (2.2).**

- (i) En fait on a prouvé, plus précisément, que le morphisme (2.1.17) induit par  $F_{X_\alpha/S_\alpha}$  est un isomorphisme.
- (ii) Pour construire le morphisme de Frobenius  $\phi_{E_i}$  nous n'avons pas supposé l'existence d'un relèvement à  $\overline{\mathcal{S}}$  du Frobenius de  $\overline{\mathcal{S}}$ , contrairement à [C-T, 12.2].

### 3. Cas propre et lisse

**Théorème (3.1).** *Soient  $S$  un  $k$ -schéma lisse et séparé et  $f : X \rightarrow S$  un  $k$ -morphisme projectif et lisse satisfaisant aux propriétés de [II, (3.4.8.2)] ou [II, (3.4.8.6)] ou [II, (3.4.9)]. Alors*

(3.1.1) *Pour tout entier  $i \geq 0$ , on a un diagramme commutatif de foncteurs naturels induits par  $f$  et définis en [II, (3.4.8.5)]*

$$\begin{array}{ccc} F^a\text{-Isoc}^\dagger(X/K) & \xrightarrow{R^i f_{\mathrm{rig}*}} & F^a\text{-Isoc}^\dagger(S/K) \\ \downarrow & & \downarrow \\ F^a\text{-Isoc}(X/K) & \xrightarrow{R^i f_{\mathrm{conv}*}} & F^a\text{-Isoc}(S/K) \end{array}$$

où les flèches verticales sont les foncteurs d'oubli.

(3.1.2) *Le foncteur  $R^i f_{\text{rig}}^*$  précédent est compatible aux changements de base entre  $k$ -schémas lisses et séparés (en particulier il commute aux passages aux fibres en les points fermés de  $S$ ), c'est-à-dire : pour tout carré cartésien*

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g'} & X \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ S' & \xrightarrow{g} & S \end{array}$$

où  $S'$  est un  $k$ -schéma lisse et séparé et  $E \in F^a\text{-Isoc}^\dagger(X/K)$  on a un isomorphisme de changement de base

$$g^* R^i f_{\text{rig}}^*(E) \xrightarrow{\sim} R^i f'_{\text{rig}}{}^*(g'^*(E))$$

compatible aux connexions et aux Frobenius.

*Démonstration.*

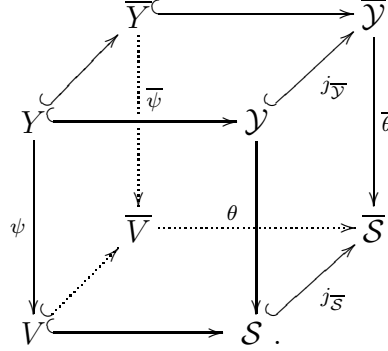
*Pour (3.1.1).* Vu la définition locale sur  $S$  de  $R^i f_{\text{rig}}^*$  [cf [II, (3.4.8.5)]] on peut supposer  $S$  affine lisse et connexe et se ramener au cas de [II, (3.4.8.2)] : alors  $f$  est relevable comme dans le théorème (2.1) ci-dessus qu'il suffit d'appliquer, d'où la conclusion.

*Pour (3.1.2).* Soient  $V = \text{Spec } A_0 \xrightarrow{j_{V_0}} S$  un ouvert affine de  $S$  et  $Y = \text{Spec } B_0 \xrightarrow{j'_{Y_0}} S'$  un ouvert affine de  $V' = S' \times_S V$ ; on note  $\psi_{VY} : Y \rightarrow V$ ,

le morphisme induit par  $g$ . Soient  $A = \mathcal{V}[t_1, \dots, t_n]/(f_1, \dots, f_r)$  une  $\mathcal{V}$ -algèbre lisse relevant  $A_0$ ,  $U = \text{Spec } A$  et  $\overline{U}$  la fermeture projective de  $U$  dans  $\mathbb{P}_{\mathcal{V}}^n$ ,  $\mathcal{S}$  et  $\overline{\mathcal{S}}$  leurs complétés formels respectifs,  $j_{\overline{\mathcal{S}}}$  l'immersion ouverte  $\mathcal{S} \hookrightarrow \overline{\mathcal{S}}$ , et posons  $X_V = X \times_S V$ , et  $\overline{V} = \overline{U} \bmod \pi$ . Si  $V$  (resp.  $Y$ ) parcourt un recouvrement ouvert affine de  $S$  (resp. de  $V'$ ) alors  $Y$  parcourt un recouvrement ouvert affine de  $S'$ ; or la donnée de  $R^i f_{\text{rig}}^*(E)$  (resp. de  $g^* R^i f_{\text{rig}}^*(E)$ ) équivaut à la donnée des  $j_V^* R^i f_{\text{rig}}^*(E)$  (resp. des  $j_Y'^* g^* R^i f_{\text{rig}}^*(E)$ ), donc la donnée de  $g^* R^i f_{\text{rig}}^*(E)$  équivaut à celle des

$$\psi_{VY}^* j_V^* R^i f_{\text{rig}}^*(E) = \psi_{VY}^* R^i f_{\text{rig}}^*(X_V/\overline{\mathcal{S}}, E_{X_V}).$$

Puisque  $\psi := \psi_{VY}$  est de type fini on peut choisir une présentation  $B_0 = A_0[x_1, \dots, x_d]/(g_1, \dots, g_s)$  de  $B_0$  sur  $A_0$  : notons  $\mathcal{Y}$  (resp.  $\overline{\mathcal{Y}}$ ) le complété formel de  $\mathbb{A}_{\mathcal{V}}^d$  (resp. de  $\mathbb{P}_{\mathcal{V}}^d$ ),  $\overline{Y}$  l'adhérence schématique de  $Y$  dans  $\mathbb{P}_{\mathcal{V}}^d$ ,  $\overline{\psi} : \overline{Y} \rightarrow \overline{V}$  le morphisme canonique et  $j_{\overline{\mathcal{Y}}} : \mathcal{Y} \hookrightarrow \overline{\mathcal{Y}}$ ,  $j_{\overline{\mathcal{Y}}} : Y \hookrightarrow \overline{Y}$  les immersions ouvertes;  $\theta : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{S}$ ,  $\overline{\theta} : \overline{\mathcal{Y}} \rightarrow \overline{\mathcal{S}}$  désignerons les projections canoniques. D'où un diagramme commutatif



Ainsi [B 3, (2.3.2) (iv)]

$$\psi^* R^i f_{\text{rig}*}(X_V/\overline{S}, E_{X_V}) = \overline{\theta}^* R^i f_{\text{rig}*}(X_V/\overline{S}, E_{X_V})$$

et  $j_{\overline{Y}}^* \overline{\theta}^* R^i f_{\text{rig}*}(X_V/\overline{S}, E_{X_V})$

$$= \theta^* j_{\overline{S}}^* R^i f_{\text{rig}*}(X_V/\overline{S}, E_{X_V})$$

$$= \theta^* R^i f_{\text{conv}*}(X_V/S, \hat{E}_{X_V}) \text{ [II, (3.4.4)]}$$

$$= \psi^* R^i f_{\text{conv}*}(X_V/S, \hat{E}_{X_V}) = \psi^*(R^i f_{\text{conv}*}(\hat{E})|_V)$$

$$= (g^*(R^i f_{\text{conv}*}(\hat{E})))|_Y$$

où  $\hat{E}$  est l'isocristal convergent associé à  $E$ .

De même on a

$$j_{\overline{Y}}^* j_Y'^* R^i f_{\text{rig}*}'(g'^*(E)) \simeq R^i f_{\text{conv}*}'(X_Y'/\mathcal{Y}, g'^*(\hat{E})_{X_Y'})$$

$$\simeq (R^i f_{\text{conv}*}'(g'^*(\hat{E})))|_Y .$$

Or le théorème [III, (3.2.1)] fournit un isomorphisme de changement de base

$$g^* R^i f_{\text{conv}*}(\hat{E}) \xrightarrow{\sim} R^i f_{\text{conv}*}'(g'^*(\hat{E})) ;$$

donc par le théorème de pleine fidélité pour les  $F$ -isocristaux de Kedlaya [Ked 2, theo 1.1] on en déduit un isomorphisme

$$g^* R^i f_{\text{rig}*}(E) \xrightarrow{\sim} R^i f'_{\text{rig}*} g'^*(E)$$

compatible aux connexions et aux Frobenius.  $\square$

**Théorème (3.2).** Soient  $S = \coprod_{\alpha=1}^n S_\alpha$  un  $k$ -schéma lisse et séparé, décomposé en la somme de ses composantes connexes, et  $f : X \rightarrow S$  un  $k$ -morphisme propre et lisse vérifiant la propriété  $\mathcal{P}$  suivante :

$$\mathcal{P} \left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe un ouvert dense } U \subset X \text{ quasi-projectif sur } S \text{ tel que} \\ \text{pour tout } \alpha \in [1, n] \text{ on ait } S_\alpha \setminus f(X \setminus U) \neq \emptyset. \end{array} \right.$$

Alors

(3.2.1) La propriété ( $\mathcal{P}$ ) équivaut à dire que  $f$  est génériquement projective, i.e. qu'il existe un ouvert dense  $V \subset S$  tel que l'application  $f_V : X_V = X_{X_S} V \rightarrow V$  induite par  $f$  soit projective et lisse.

(3.2.2) Supposons  $k$  parfait,  $e \leq p-1$  et que le  $f_V$  de (3.2.1) satisfait aux hypothèses de [II, (3.4.8.2)] ou [II, (3.4.8.6)] ou [II, (3.4.9)]. Si  $E \in F^a\text{-Isoc}^\dagger(X/K)_{\text{plat}}$  a pour image  $\mathcal{E} \in F^a\text{-Isoc}(X/K)$ , alors :

- (i)  $\mathcal{E}^i = R^i f_{\text{conv}*}(\mathcal{E}) \in F^a\text{-Isoc}(S/K)$ ,
- (ii) Il existe  $E^i \in F^a\text{-Isoc}^\dagger(S/K)$ , unique à isomorphisme près, tel que  $\mathcal{E}^i$  soit l'image de  $E^i$  par le foncteur d'oubli

$$\begin{aligned} F^a\text{-Isoc}^\dagger(S/K) &\longrightarrow F^a\text{-Isoc}(S/K) \\ E^i &\longmapsto \widehat{E^i} = \mathcal{E}^i. \end{aligned}$$

*Démonstration.*

*Prouvons (3.2.1).* Si  $f$  est génériquement projective et lisse on prouve facilement qu'elle vérifie ( $\mathcal{P}$ ).

Réciproquement supposons que  $f$  vérifie ( $\mathcal{P}$ ).

Par le lemme de Chow précis de Gruson-Raynaud [R-G, I, cor 5.7.14] il existe un éclatement  $U$ -admissible  $g : X' \rightarrow X$ , avec  $X'$  quasi-projectif sur  $S$  : en particulier  $g$  induit un isomorphisme

$$g_U : U' = g^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} U.$$

De plus, comme  $f$  et  $g$  sont propres, le morphisme composé  $f \circ g : X' \rightarrow X$  est projectif [EGA II, (5.5.3) (ii)]. L'image du fermé  $Z := X \setminus U$  par le morphisme

propre  $f$  est un fermé  $f(Z)$  de  $S$  et l'ouvert  $V = S \setminus f(Z) = \coprod_{\alpha} (S_{\alpha} \setminus f(X - U))$  est non vide par hypothèse : comme  $S_{\alpha}$  est connexe et intègre, l'ouvert non vide  $V_{\alpha} := S_{\alpha} \setminus f(X \setminus U)$  de  $S_{\alpha}$  est dense, donc l'immersion ouverte  $j : V \hookrightarrow S$  est dominante. D'autre part l'ouvert  $X_V = X \times_S V$  de  $X$  ne rencontre pas  $f^{-1}(f(Z))$ , donc  $X_V$  est un ouvert de  $U$  : par suite l'isomorphisme  $g_U$  induit un isomorphisme

$$g_V : X'_U = g^{-1}(X_V) \xrightarrow{\sim} X_V.$$

Notons  $f_V : X_V \rightarrow V$  la restriction de  $f$  ; le morphisme composé  $f_V \circ g_V$ , restriction du morphisme projectif  $f \circ g$ , est lui aussi projectif : ainsi  $f_V$  est projectif, d'où (3.2.1).

*Prouvons le (3.2.2).* Le (i) est mis pour mémoire, car prouvé en [III, (3.3.1)]. Pour le (ii) considérons le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} X_V & \xrightarrow{j'} & X \\ f_V \downarrow & & \downarrow f \\ V & \xrightarrow{j} & S; \end{array}$$

on a un isomorphisme de changement de base en cohomologie convergente [III, (3.3.1)]

$$(3.2.2.1) \quad j^* R^i f_{\text{conv}*}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} R^i f_{V \text{ conv}*}(j'^*(\mathcal{E})) =: \mathcal{E}_V^i,$$

où  $\mathcal{E}$  désigne l'image de  $E$  par le foncteur d'oubli  $F^a\text{-Isoc}^{\dagger}(X/K) \rightarrow F^a\text{-Isoc}(X/K)$ ,  $E \mapsto \hat{E} = \mathcal{E}$ .

Pour la suite de la démonstration on peut supposer  $S$  connexe, intègre : quitte à restreindre  $V$  on peut supposer  $V$  affine, lisse et connexe,  $V = \text{Spec } A_0$ . On utilise alors les notations introduites dans la démonstration du théorème (3.1) :  $j_{\overline{S}} : \mathcal{S} = \text{Spf } \hat{A} \hookrightarrow \overline{\mathcal{S}}$ . De plus  $f_V$  se relève en un morphisme projectif et lisse  $h : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{S}$  s'insérant dans un carré cartésien de  $\mathcal{V}$ -schémas formels

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \longrightarrow & X \\ h \downarrow & & \downarrow \overline{h} \\ \mathcal{S} & \xrightarrow{j_{\overline{S}}} & \overline{\mathcal{S}} \end{array}$$

où  $\overline{h}$  est projectif [I, théo (3;3)]. En notant  $E_V^i = R^i f_{V \text{ rig}*}(X_V/\overline{\mathcal{S}}, j'^*(E))$ , le théorème (3.1) prouve que  $E_V^i \in F^a\text{-Isoc}^{\dagger}(V/K)$ . On peut appliquer le [II,

(3.4.4)] qui fournit un isomorphisme

$$(3.2.2.2) \quad \widehat{E_V^i} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_V^i$$

compatible aux Frobenius. Par le théorème 2 de [Et 5], les isomorphismes (3.2.2.1) et (3.2.2.2) assurent l'existence de  $E^i \in F^a\text{-Isoc}^\dagger(S/K)$  tel que

$$\mathcal{E}^i = \widehat{E^i} \quad \text{et} \quad E_V^i = j^*(E^i).$$

L'unicité de  $E^i$  à isomorphisme près provient de la pleine fidélité du foncteur d'oubli  $F^a\text{-Isoc}^\dagger(S/K) \rightarrow F^a\text{-Isoc}(S/K)$  établi par Kedlaya [Ked 2, theo 1.1]. D'où le théorème.  $\square$

## 4. Cas fini étale

**Théorème (4.1).** *Soient  $S$  un  $k$ -schéma lisse et séparé et  $f : X \rightarrow S$  un  $k$ -morphisme fini étale. Alors, pour tout entier  $i \geq 0$ ,  $f$  induit des foncteurs canoniques*

$$R^i f_{\text{rig}*} : \text{Isoc}^\dagger(X/K) \longrightarrow \text{Isoc}^\dagger(S/K)$$

$$R^i f_{\text{rig}*} : F^a\text{-Isoc}^\dagger(X/K) \longrightarrow F^a\text{-Isoc}^\dagger(S/K)$$

et  $R^i f_{\text{rig}*}(E) = 0$  pour tout  $i \geq 1$ .

*Démonstration.* Soient  $S_0 = \text{Spec } A_0 \hookrightarrow S$  un ouvert affine et  $A_1, A_2$  deux  $\mathcal{V}$ -algèbres lisses relevant  $A_0$ . On pose  $S_1 = \text{Spec } A_1, S_2 = \text{Spec } A_2$ ; par la méthode du [I, théo (3.1)] on a des compactifications  $\overline{S}_1 := P_1, \overline{S}_2 := P_2$  de  $S_1$  et  $S_2$  et on note  $\overline{S}_0$  l'adhérence schématique de  $S_0$  plongé diagonalement dans  $\overline{S}_1 \times_{\mathcal{V}} \overline{S}_2$ . En désignant par  $f_0$  la restriction de  $f$  à  $X_0 = f^{-1}(S_0)$  et par  $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \overline{\mathcal{S}}_1, \overline{\mathcal{S}}_2$  les complétés formels de  $S_1, S_2, \overline{S}_1, \overline{S}_2$  respectivement, le théorème (3.1) du I fournit des carrés cartésiens,  $i = 1, 2$ ,

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X}_i & \longrightarrow & \overline{\mathcal{X}}_i \\ h_i \downarrow & & \downarrow \overline{h}_i \\ \mathcal{S}_i & \hookrightarrow & \overline{\mathcal{S}}_i \end{array}$$

où  $\overline{h}_i$  est fini,  $h_i$  est fini étale et relève  $f_0$ ; d'où deux cubes commutatifs ( $i = 1, 2$ )

$$\begin{array}{ccccc}
& & \mathcal{X}_i & \xrightarrow{\quad} & \overline{\mathcal{X}}_i \\
& \nearrow u_{\mathcal{X}_i} & \vdots h_i & & \nearrow u_{\overline{\mathcal{X}}_i} \\
\mathcal{X}_1 \times_{\mathcal{V}} \mathcal{X}_2 & \xrightarrow{\quad} & \overline{\mathcal{X}}_1 \times_{\mathcal{V}} \overline{\mathcal{X}}_2 & & \\
\downarrow h_1 \times h_2 & & \downarrow \bar{h}_1 \times \bar{h}_2 & & \downarrow \bar{h}_i \\
& \nearrow u_{S_i} & \mathcal{S}_i & \xrightarrow{\quad} & \overline{\mathcal{S}}_i \\
& & \vdots & & \vdots \\
\mathcal{S}_1 \times_{\mathcal{V}} \mathcal{S}_2 & \xrightarrow{\quad} & \overline{\mathcal{S}}_1 \times_{\mathcal{V}} \overline{\mathcal{S}}_2 & & 
\end{array}$$

Par le théorème [II, (3.4.1)] on sait que pour  $E \in \text{Isoc}^\dagger(X/K)$  et  $E_0$  sa restriction à  $X_0$ , alors  $R^i f_{0\text{rig}*}(X_0/\overline{\mathcal{S}}_1, E_0)$  et  $R^i f_{0\text{rig}*}(X_0/\overline{\mathcal{S}}_2, E_0)$  sont éléments de  $\text{Isoc}^\dagger(S_0/K)$  : de plus ils sont nuls pour  $i \geq 1$  car  $\bar{h}_1$  et  $\bar{h}_2$  sont finis. De plus le théorème [II, (3.4.4)] fournit des isomorphismes de changement de base

$$u_{\overline{\mathcal{S}}_i}^* : f_{0\text{rig}*}(X_0/\overline{\mathcal{S}}_i, E_0) \xrightarrow{\sim} f_{0\text{rig}*}(X_0/\overline{\mathcal{S}}_1 \times_{\mathcal{V}} \overline{\mathcal{S}}_2, u_{\overline{\mathcal{X}}_i}^* E_0);$$

d'où un isomorphisme

$$f_{0\text{rig}*}(X_0/\overline{\mathcal{S}}_1, E_0) \xrightarrow{\sim} f_{0\text{rig}*}(X_0/\overline{\mathcal{S}}_2, E_0),$$

et cet isomorphisme vérifie la condition de cocycles pour trois relèvements  $S_1, S_2, S_3$  de  $S_0$ .

Par suite  $f$  induit un foncteur

$$f_{\text{rig}*} : \text{Isoc}^\dagger(X/K) \longrightarrow \text{Isoc}^\dagger(S/K)$$

puisque les constructions se recollent sur les ouverts de  $S$ . On pouvait aussi conclure en appliquant [II, (3.4.8)].

La construction du Frobenius étant locale, on peut, pour montrer que  $f_{\text{rig}*}$  induit un foncteur

$$f_{\text{rig}*} : F^a\text{-Isoc}^\dagger(X/K) \longrightarrow F^a\text{-Isoc}^\dagger(S/K),$$

supposer que  $S$  est affine et lisse. La construction du théorème (2.1) s'applique; le morphisme (2.1.17) est alors un isomorphisme car  $F_{X/S}$  est un isomorphisme puisque  $f$  est étale : là on n'a pas besoin d'utiliser les résultats de Ogus via le cas convergent (où l'on avait supposé  $e \leq p-1$ ). On en déduit directement que  $\phi_{E_i}$  est un isomorphisme. D'où le théorème.  $\square$

**Remarque (4.1.1).** Tsuzuki a abordé dans [Tsu 1, theo (2.6.3)] la construction de  $f_{\text{rig}}^*(X_0/\overline{\mathcal{S}}, -)$  dans le cas fini étale, mais il n'étudie pas l'indépendance par rapport à  $\overline{\mathcal{S}}$  et ne prouve pas l'existence d'un  $\mathcal{V}$ -morphisme fini relevant le  $f_0$  ci-dessus.

**Théorème (4.2).** *Soient  $S$  un  $k$ -schéma séparé de type fini,  $E \in \text{Isoc}^\dagger(S/K)$  et  $f : X \rightarrow S$  un  $k$ -morphisme fini étale galoisien de groupe  $G$ .*

(4.2.1) *Si  $S$  est lisse sur  $k$ , alors, pour tout entier  $i \geq 0$ , on a des isomorphismes canoniques*

$$\begin{aligned} H_{\text{rig}}^i(S/K, E) &\xrightarrow{\sim} (H_{\text{rig}}^i(S/K, f_{\text{rig}*} f^* E))^G \\ &\xrightarrow{\sim} (H_{\text{rig}}^i(X/K, f^* E))^G. \end{aligned}$$

(4.2.2) *Si  $k$  est parfait, ou si  $S$  est affine et lisse sur  $k$ , alors, pour tout entier  $i \geq 0$ , on a des isomorphismes canoniques*

$$\begin{aligned} H_{\text{rig},c}^i(S/K, E) &\xrightarrow{\sim} (H_{\text{rig},c}^i(S/K, f_{\text{rig}*} f^* E))^G \\ &\xrightarrow{\sim} (H_{\text{rig},c}^i(X/K, f^* E))^G. \end{aligned}$$

(4.2.3) *Si  $E \in F^a\text{-Isoc}^\dagger(S/K)$  alors les isomorphismes de (4.2.1) et (4.2.2) sont compatibles à l'action du Frobenius.*

*Démonstration.* Par additivité de la cohomologie rigide, avec ou sans supports, on peut supposer, pour le (1) et le (2), que  $S$  est connexe.

Pour le (4.2.1), la suite spectrale de Čech en cohomologie rigide nous ramène à  $S$  affine et lisse sur  $k$ ,  $S = \text{Spec } A_0$ . On choisit une  $\mathcal{V}$ -algèbre lisse  $A$  relevant  $A_0$  et on reprend les notations utilisées dans la preuve de (3.2.2) : il existe un carré cartésien de  $\mathcal{V}$ -schémas formels

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X}^\circ & \longrightarrow & \overline{\mathcal{X}} \\ h \downarrow & & \downarrow \overline{h} \\ \mathcal{S}^\circ & \longrightarrow & \overline{\mathcal{S}} \end{array}$$

et un système fondamental  $(V_\lambda)_\lambda = (\text{Spm } A_\lambda)_\lambda$  de voisinages stricts de  $]S[_{\overline{\mathcal{S}}}$  dans  $\overline{\mathcal{S}}_K$  et  $\lambda_0 > 1$  tel que pour  $1 < \lambda \leq \lambda_0$  on ait un diagramme à carrés cartésiens



$$(4.2.1.1) \quad \begin{array}{ccccc} \mathcal{X}_K & \hookrightarrow & W_\lambda & \hookrightarrow & \overline{\mathcal{X}}_K \\ h_K \downarrow & & h_\lambda \downarrow & & \downarrow \overline{h}_K \\ \mathcal{S}_K & \hookrightarrow & V_\lambda & \hookrightarrow & \overline{\mathcal{S}}_K \end{array}$$

avec  $\overline{h}_K$  fini,  $h_K$  et  $h_\lambda$  finis étales galoisiens de groupe  $G$  [II, (2.3.1)(2)].

(4.2.1.2) Soit  $E_\lambda$  un  $\mathcal{O}_{V_\lambda}$ -module localement libre de type fini. Pour  $1 < \mu \leq \lambda$  on note

$$\alpha_{\lambda_\mu} : V_\mu \hookrightarrow V_\lambda \quad , \quad \alpha_\lambda : V_\lambda \hookrightarrow \overline{\mathcal{S}}_K$$

$$\alpha'_{\lambda_\mu} : W_\mu \hookrightarrow W_\lambda \quad , \quad \alpha'_\lambda : W_\lambda \hookrightarrow \overline{\mathcal{X}}_K,$$

les immersions ouvertes et on pose

$$j_\lambda^\dagger E_\lambda = \varinjlim \alpha_{\lambda_\mu*} \alpha_{\lambda_\mu}^*(E_\lambda),$$

$$j_\lambda'^\dagger h_\lambda^* E_\lambda = \varinjlim \alpha'_{\lambda_\mu*} \alpha'_{\lambda_\mu}{}^* h_\lambda^* (E_\lambda),$$

$$j_\lambda^\dagger E_\lambda = \alpha_{\lambda*} j_\lambda'^\dagger E_\lambda,$$

$$j_\lambda'^\dagger h_\lambda^*(E_\lambda) = \alpha_{\lambda'}^* j_\lambda'^\dagger h_\lambda^* (E_\lambda).$$

**Lemme (4.2.1.3).** *Avec les notations précédentes on a des isomorphismes canoniques*

- (i)  $(h_{\lambda*} h_\lambda^*(E_\lambda))^G \xrightarrow{\sim} E_\lambda.$
- (ii)  $(h_{\lambda*} h_\lambda^* j_\lambda^\dagger E_\lambda)^G \xrightarrow{\sim} j_\lambda^\dagger E_\lambda.$
- (iii)  $(\overline{h}_{K*} \overline{h}_K^* j_\lambda^\dagger E_\lambda)^G \xrightarrow{\sim} j_\lambda^\dagger E_\lambda.$

*Démonstration du lemme (4.2.1.3).*

- (i) Comme  $E_\lambda$  est localement libre de type fini on a un isomorphisme

$$h_{\lambda*} h_\lambda^*(E_\lambda) \xrightarrow{\sim} h_{\lambda*} h_\lambda^*(\mathcal{O}_{V_\lambda}) \otimes_{\mathcal{O}_{V_\lambda}} E_\lambda,$$

et l'action de  $G$  sur le membre de gauche se fait par l'intermédiaire de  $h_{\lambda*} h_\lambda^*(\mathcal{O}_{V_\lambda})$  puisque  $G$  agit trivialement sur  $E_\lambda$  : on est ramené au cas  $E = \mathcal{O}_{V_\lambda}$  qui a été prouvé dans la proposition [II, (2.3.1)].

(ii) On a des isomorphismes

$$\begin{aligned} h_{\lambda*} h_{\lambda}^* j_{\lambda}^{\dagger} E_{\lambda} &\simeq h_{\lambda*} j_{\lambda}^{\dagger} h_{\lambda}^* E_{\lambda} [B3, (2.1.4.7)] \\ &\simeq j_{\lambda}^{\dagger} h_{\lambda*} h_{\lambda}^* E_{\lambda} [II, (3.1.4.1)] \\ &\simeq h_{\lambda*} h_{\lambda}^* E_{\lambda} \otimes_{\mathcal{O}_{V_{\lambda}}} j_{\lambda}^{\dagger} \mathcal{O}_{V_{\lambda}} [B3, (2.1.3)(ii)]. \end{aligned}$$

L'action de  $G$  sur  $h_{\lambda*} h_{\lambda}^* j_{\lambda}^{\dagger} E_{\lambda}$  se fait par l'intermédiaire de  $h_{\lambda*} h_{\lambda}^* E_{\lambda}$  puisque  $G$  agit trivialement sur  $j_{\lambda}^{\dagger}(\mathcal{O}_{V_{\lambda}})$  : le (ii) résulte alors du (i).

(iii) La preuve est semblable à celle du (ii) en utilisant cette fois [B 3, (2.1.4.8)] et [II (3.1.4.2)]. D'où le lemme.  $\square$

Soit  $E \in \text{Isoc}^{\dagger}(S/K)$  : on choisit le  $V_{\lambda}$  comme ci-dessus de sorte qu'il existe un  $\mathcal{O}_{V_{\lambda}}$ -module localement libre et cohérent  $E_{\lambda}$  tel que  $j^{\dagger}E_{\lambda}$  soit une réalisation de  $E$ .

La cohomologie rigide  $H_{\text{rig}}^*(S/K; E)$  est, pour  $1 < \mu \leq \lambda$ , la cohomologie des complexes

$$(4.2.1.4) \quad R\Gamma(V_{\mu}; j_{\mu}^{\dagger}E_{\mu} \otimes_{\mathcal{O}_{V_{\mu}}} \Omega_{V_{\mu}/K}^{\bullet}) \leftarrow R\Gamma(V_{\lambda}; j_{\lambda}^{\dagger}E_{\lambda} \otimes_{\mathcal{O}_{V_{\lambda}}} \Omega_{V_{\lambda}/K}^{\bullet})$$

$$\xrightarrow{\sim} M \otimes_{A_K^{\dagger}} \Omega_{A_K^{\dagger}}^{\bullet},$$

où la première flèche (resp. la deuxième) est un isomorphisme (resp. un quasi-isomorphisme), où  $M := \Gamma(V_{\lambda}; j_{\lambda}^{\dagger}E_{\lambda})$  est un  $A_K^{\dagger}$ -module projectif de type fini à connexion intégrable [B 3, (2.5.2)], où  $\Omega_{V_{\lambda}/K}^1$  est localement libre de type fini sur le faisceau cohérent d'anneaux  $\mathcal{O}_{V_{\lambda}}$  [II (2.3.1) (2)] et où  $\Omega_{A_K^{\dagger}}^1$  est un  $A_K^{\dagger}$ -module projectif de type fini [Et 5, 1.3].

De même la cohomologie rigide

$$H_{\text{rig}}^*(S/K; f_{\text{rig}*} f^* E) \quad (\text{resp. } H_{\text{rig}}^*(X/K; f^* E))$$

est la cohomologie des complexes

$$(4.2.1.5) \quad R\Gamma(V_{\lambda}; h_{\lambda*} h_{\lambda}^* (j_{\lambda}^{\dagger}E_{\lambda}) \otimes_{\mathcal{O}_{V_{\lambda}}} \Omega_{V_{\lambda}/K}^{\bullet})$$

[resp. des complexes

$$(4.2.1.6) \quad R\Gamma(W_{\lambda}; h_{\lambda}^* (j_{\lambda}^{\dagger}E_{\lambda}) \otimes_{\mathcal{O}_{W_{\lambda}}} \Omega_{W_{\lambda}/K}^{\bullet}) ].$$

Or la formule de projection, jointe au fait que  $h_\lambda$  est étale, fournit des isomorphismes

$$\begin{aligned}
 (4.2.1.7) \quad & h_{\lambda*} h_\lambda^* (j_\lambda^\dagger E_\lambda) \otimes_{\mathcal{O}_{V_\lambda}} \Omega_{V_\lambda/K}^\bullet \simeq h_{\lambda*} (h_\lambda^* j_\lambda^\dagger E_\lambda \otimes_{\mathcal{O}_{W_\lambda}} h_\lambda^* (\Omega_{V_\lambda/K}^\bullet)) \\
 & \simeq h_{\lambda*} (h_\lambda^* j_\lambda^\dagger E_\lambda \otimes_{\mathcal{O}_{W_\lambda}} \Omega_{W_\lambda/K}^\bullet) ;
 \end{aligned}$$

donc les complexes (4.2.1.5) et (4.2.1.6) sont quasi-isomorphes puisque  $h_\lambda$  est fini.

Compte tenu du lemme (4.2.1.3) les isomorphismes

$$\begin{aligned}
 H_{\text{rig}}^i(S/K; E) & \xrightarrow{\sim} H_{\text{rig}}^i(S/K; f_{\text{rig}*} f^* E)^G \\
 & \xrightarrow{\sim} H_{\text{rig}}^i(X/K; f^* E)^G
 \end{aligned}$$

s'établissent comme [Et 2, (3.1.1)].

Pour le (4.2.2), comme la cohomologie rigide ne dépend que du schéma réduit sous-jacent, on supposera  $S$  réduit : si  $k$  est parfait il existe alors un ouvert dense  $U \hookrightarrow S$  avec  $U$  affine et lisse sur  $k$  et  $Z := S \setminus U$  de dimension strictement plus petite que celle de  $S$  [Et 3, dém. du théo 3]. De plus  $H^j(G, H_{\text{rig},c}^i(S/K, f_{\text{rig}*} f^* E)) = 0$  pour  $j \geq 1$  [S 2, VIII, § 2, cor 1 de prop 4] ; par fonctorialité en  $E$  de la cohomologie rigide à supports on en déduit un morphisme de suites exactes longues

$$\begin{array}{ccccccc}
 \longrightarrow & H_{\text{rig},c}^i(U, E|_U) & \longrightarrow & H_{\text{rig},c}^i(S, E) & \longrightarrow & H_{\text{rig},c}^i(Z, E|_Z) & \longrightarrow \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 \longrightarrow & (H_{\text{rig},c}^i(U, f_{U\text{rig}*} f_U^* E|_U))^G & \longrightarrow & (H_{\text{rig},c}^i(S, f_{\text{rig}*} f^* E))^G & \longrightarrow & (H_{\text{rig},c}^i(Z, f_{Z\text{rig}*} f_Z^* E|_Z))^G & \longrightarrow
 \end{array}$$

Par récurrence sur la dimension on est ramené à montrer l'isomorphisme du (4.2.2) pour  $S$  affine et lisse sur  $k$ .

Reprenons les notations utilisées pour la démonstration du (4.2.1) et considérons le diagramme commutatif à carrés cartésiens

$$(4.2.2.1) \quad \begin{array}{ccccc} \mathcal{X}_K & \hookrightarrow & W_\lambda & \xleftarrow{i'_\lambda} & W_\lambda \setminus \mathcal{X}_K \\ h_K \downarrow & & h_\lambda \downarrow & & \downarrow h'_\lambda \\ \mathcal{S}_K & \hookrightarrow & V_\lambda & \xleftarrow{i_\lambda} & V_\lambda \setminus \mathcal{S}_K. \end{array}$$

La cohomologie à supports  $H_{\text{rig},c}^*(S/K; E)$

$$[\text{resp. } H_{\text{rig},c}^*(S/K; f_{\text{rig}*} f^* E), \text{resp. } H_{\text{rig},c}^*(X/K; f^* E)]$$

est la cohomologie du complexe

$$(4.2.2.2) \quad R\Gamma(V_\lambda; j_\lambda^\dagger E_\lambda \otimes_{\mathcal{O}_{V_\lambda}} \Omega_{V_\lambda/K}^\bullet \longrightarrow i_{\lambda*} i_\lambda^* (j_\lambda^\dagger E_\lambda \otimes_{\mathcal{O}_{V_\lambda}} \Omega_{V_\lambda/K}^\bullet))$$

[resp.

$$(4.2.2.3) \quad R\Gamma(V_\lambda; h_{\lambda*} h_\lambda^* (j_\lambda^\dagger E_\lambda) \otimes_{\mathcal{O}_{V_\lambda}} \Omega_{V_\lambda/K}^\bullet \rightarrow i_{\lambda*} i_\lambda^* (h_{\lambda*} h_\lambda^* (j_\lambda^\dagger E_\lambda) \otimes_{\mathcal{O}_{V_\lambda}} \Omega_{V_\lambda/K}^\bullet));$$

resp.

$$(4.2.2.4) \quad R\Gamma(W_\lambda; h_\lambda^* (j_\lambda^\dagger E_\lambda \otimes_{\mathcal{O}_{W_\lambda}} \Omega_{W_\lambda/K}^\bullet \rightarrow i'_{\lambda*} i'^*_\lambda (h_\lambda^* (j_\lambda^\dagger E_\lambda) \otimes_{\mathcal{O}_{W_\lambda}} \Omega_{W_\lambda/K}^\bullet))].$$

Le théorème de changement de base pour un morphisme propre [II, théorème (3.3.2)] fournit des isomorphismes

$$i_{\lambda*} i_\lambda^* (h_{\lambda*} h_\lambda^* (j_\lambda^\dagger E_\lambda) \otimes_{\mathcal{O}_{V_\lambda}} \Omega_{V_\lambda}^\bullet) \simeq i_{\lambda*} i_\lambda^* h_{\lambda*} (h_\lambda^* (j_\lambda^\dagger E_\lambda) \otimes_{\mathcal{O}_{W_\lambda}} \Omega_{W_\lambda}^\bullet)$$

$$\simeq i_{\lambda*} h'_{\lambda*} i'^*_\lambda (h_\lambda^* j_\lambda^\dagger E_\lambda \otimes \Omega_{W_\lambda}^\bullet) \simeq h_{\lambda*} i'_{\lambda*} i'^*_\lambda (h_\lambda^* j_\lambda^\dagger E_\lambda \otimes_{\mathcal{O}_{W_\lambda}} \Omega_{W_\lambda}^\bullet) ;$$

donc via (4.2.1.7) les complexes (4.2.2.3) et (4.2.2.4) sont quasi-isomorphes puisque  $h_\lambda$  est fini. L'isomorphisme (4.2.2) du théorème (4.2) en résulte, compte tenu de (4.2.1.3) (ii).

Pour le (4.2.3), on peut supposer  $S$  connexe affine et lisse sur  $\mathcal{V}$  comme ci-dessus, dont on reprend les notations ainsi que celles de [II, (2.3.1) (2)]. On fixe un relèvement  $F_{A^\dagger} : A^\dagger \rightarrow A^\dagger$

$$[\text{resp. } F_{B^\dagger} : B^\dagger \xrightarrow{1_{B^\dagger} \otimes F_{A^\dagger}} B^\dagger \otimes A^\dagger \xrightarrow{\sim_{F_{B^\dagger/A^\dagger}}} B^\dagger]$$

du Frobenius de  $A_0$  [resp. de  $B_0$ ] comme dans [Et 5, (1.2)] : par extension des scalaires on en déduit  $F_{\hat{A}_K} : \hat{A}_K \rightarrow \hat{A}_K$  et  $F_{\hat{B}_K} : \hat{B}_K \rightarrow \hat{B}_K$ . On a vu en (1.2.4) qu'on dispose de carrés cartésiens où  $F_{\lambda\mu}$  et  $F'_{\lambda\mu}$  sont finis :

$$(4.2.3.1) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{S}_K = \text{Spm}(\hat{A}_K) & \hookrightarrow & V_\mu = \text{Spm}(A_\mu) \\ F_{\mathcal{S}_K} = \text{Sp } F_{\hat{A}_K} \downarrow & & \downarrow F_{\lambda\mu} \\ \mathcal{S}_K = \text{Spm}(\hat{A}_K) & \hookrightarrow & V_\lambda = \text{Spm}(A_\lambda) \end{array}$$

et

$$(4.2.3.2) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{X}_K = \text{Spm}(\hat{B}_K) & \hookrightarrow & W_\mu = \text{Spm}(B_\mu) \\ F_{\mathcal{X}_K} = \text{Sp } F_{\hat{B}_K} \downarrow & & \downarrow F'_{\lambda\mu} \\ \mathcal{X}_K = \text{Spm}(\hat{B}_K) & \hookrightarrow & V_\mu = \text{Spm}(B_\lambda) ; \end{array}$$

plus précisément, étant donné  $\lambda$  on trouve  $\mu$  de la façon suivante : en fixant des générateurs  $\{x_i\}$  de  $B_\lambda$  sur  $A_\lambda$  comme dans la preuve de [II, (2.3.1) (2)], les éléments  $F_{\hat{B}_K}(x_i)$  sont entiers sur  $A_\lambda \subset A_K^\dagger$ , donc a fortiori sur  $B_K^\dagger = \varinjlim_n B_{\lambda^n}$  : il existe donc  $\mu$ ,  $1 < \mu \leq \lambda$  tel que pour tout  $i$  on ait  $F_{\hat{B}_K}(x_i) \in B_\mu$ .

Comme dans la preuve de [II, (2.3.1) (2)] on peut aussi supposer que pour tout  $i$  et tout  $g \in G$  on a  $g_{\hat{B}_K}(x_i) \in B_\mu$ . Ainsi  $F'_{\lambda\mu} : W_\mu \rightarrow W_\lambda$  (resp.  $g_\lambda : W_\lambda \rightarrow W_\lambda$  est induit par  $F_{B^\dagger} : B^\dagger \rightarrow B^\dagger$  (resp.  $g_{B^\dagger} : B^\dagger \rightarrow B^\dagger$ ); pour prouver le lemme suivant :

**Lemme (4.2.3.3).**

$$g_\lambda \circ F'_{\lambda\mu} = F'_{\lambda\mu} \circ g_\mu.$$

il suffit de prouver le

**Lemme (4.2.3.4).**

$$g_{B^\dagger} \circ F_{B^\dagger} = F_{B^\dagger} \circ g_{B^\dagger}.$$

Or  $g \in G$  induit un morphisme  $g_X : X \rightarrow X$  tel que  $g_X \circ F_X = F_X \circ g_X$ , puisque  $g(x^q) = g(x)^q$  pour toute section  $x$  de  $O_X$ ; d'où un diagramme commutatif

$$(4.2.3.5) \quad \begin{array}{ccccc} & & F_X & & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ X & \xleftarrow{\pi_X} & X(q/S) & \xleftarrow{\sim F_{X/S}} & X \\ \uparrow g_X & \textcircled{1} & \uparrow g_X^{(q)} & \textcircled{2} & \uparrow g_X \\ X & \xleftarrow{\pi_X} & X(q/S) & \xleftarrow{\sim F_{X/S}} & X \end{array} .$$

Le carré commutatif  $\textcircled{1}$  se relève en le carré commutatif

$$(4.2.3.6) \quad \begin{array}{ccc} B^\dagger & \xrightarrow{1_{B^\dagger} \otimes F_{A^\dagger}} & B^\dagger \otimes A^\dagger \\ g_{B^\dagger} \downarrow & & \downarrow g_{B^\dagger} \otimes 1_{A^\dagger} \\ B^\dagger & \xrightarrow{1_{B^\dagger} \otimes F_{A^\dagger}} & B^\dagger \otimes A^\dagger . \end{array}$$

Par l'équivalence de catégories  $B^\dagger \mapsto B_0$  de la catégorie des  $A^\dagger$ -algèbres finies étales dans la catégorie des  $A_0$ -algèbres finies étales [Et 4, théo 7], on relève le carré commutatif  $\textcircled{2}$  en le carré commutatif

$$(4.2.3.7) \quad \begin{array}{ccc} B^\dagger \otimes A^\dagger & \xrightarrow[\sim]{F_{B^\dagger/A^\dagger}} & B^\dagger \\ g_{B^\dagger} \otimes 1_{A^\dagger} \downarrow & & \downarrow g_{B^\dagger} \\ B^\dagger \otimes A^\dagger & \xrightarrow[\sim]{F_{B^\dagger/A^\dagger}} & B^\dagger . \end{array}$$

Par composition on a prouvé (4.2.3.4), donc (4.2.3.3).

Compte tenu de la commutation (4.2.3.3) et de la définition de la cohomologie rigide (resp. de la cohomologie rigide à supports compacts) donnée en (4.2.1.4), (4.2.1.5), (4.2.1.6) [resp. en (4.2.2.2), (4.2.2.3), (4.2.2.4)] les isomorphismes (4.2.1) et (4.2.2) du théorème (4.2) sont compatibles à l'action du Frobenius.  $\square$

Dans la preuve du théorème (4.2) on a montré au passage :

**Lemme (4.3).** *Si  $S$  est un  $k$ -schéma séparé de type fini,  $f : X \rightarrow S$  est fini étale (non nécessairement galoisien) et  $E \in \text{Isoc}^\dagger(X/K)$  on a des isomorphismes canoniques*

- (1)  $H_{\text{rig}}^i(X/K; E) \xrightarrow{\sim} H_{\text{rig}}^i(S/K; f_{\text{rig}*} E).$
- (2)  $H_{\text{rig},c}^i(X/K; E) \xrightarrow{\sim} H_{\text{rig},c}^i(S/K; f_{\text{rig}*} E).$
- (3) *Si de plus  $E \in F^a\text{-Isoc}^\dagger(X/K)$  les isomorphismes du (1) et (2) commutent à l'action de Frobenius.*

**Remarques (4.4).**

- (i) Les résultats du lemme (4.3) sont donnés par Tsuzuki dans [Tsu 1, cor (2.6.5) et (2.6.6)], sans précisions de démonstration, notamment pour le (2) du lemme : nous y avons utilisé le théorème de changement de base pour un morphisme propre [II, (3.3.2)], qui n'est pas mentionné par Tsuzuki.
- (ii) Le (4.2.2) du théorème (4.2) est une étape essentielle pour établir la finitude de la cohomologie rigide à supports compacts à coefficients dans un  $F$ -isocristal surconvergent unité à partir de la finitude de la cohomologie cristalline via la suite exacte longue de localisation en cohomologie rigide, la preuve de cet isomorphisme crucial n'apparaît pas dans la démonstration du théorème 6.1.2 de [Tsu 1].

## 5. Cas plongeable

### 5.1. On suppose donné un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{j_Y} & \mathcal{Y} \\ f \downarrow & & \downarrow \bar{h} \\ S & \xrightarrow{j_{\mathcal{T}}} & \mathcal{T} \xrightarrow{\rho} Spf \mathcal{V} \end{array}$$

dans lequel  $f$  est un morphisme de  $k$ -schémas séparés de type fini,  $\bar{h}$  et  $\rho$  sont des morphismes propres de  $\mathcal{V}$ -schémas formels,  $\bar{h}$  (resp.  $\rho$ ) est lisse sur un voisinage de  $X$  dans  $\mathcal{Y}$  (resp. un voisinage de  $S$  dans  $\mathcal{T}$ ),  $j_Y$  et  $j_{\mathcal{T}}$  sont des immersions. Désignons par  $T$  (resp.  $Y$ ) l'adhérence schématique de  $S$  dans  $\mathcal{T}$  (resp. de  $X$  dans  $\mathcal{Y}$ ),  $\bar{f} : Y \rightarrow T$  le morphisme induit par  $\bar{h}$ ,  $i_Y : Y \hookrightarrow \mathcal{Y}$  l'immersion fermée,  $X_1 := \bar{f}^{-1}(S)$  et  $f_1 : X_1 \rightarrow S$  le morphisme induit par  $\bar{f}$ .

On note  $F_S$  (resp.  $F_X$ ) le Frobenius de  $S$  (resp. de  $X$ ) (élévation à la puissance  $q = p^a$  sur le faisceau structural) ; d'où le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
X & & & & \\
\searrow^{F_{X/S}} & & \xrightarrow{F_X} & & \\
& X^{(q)} & \xrightarrow{\pi_{X/S}} & X & \\
\downarrow f & \downarrow f^{(q)} & & \downarrow f & \\
S & \xrightarrow{F_S} & S & &
\end{array}$$

**Théorème (5.2).**

(5.2.1) Sous les hypothèses (5.1) supposons que  $\bar{h}^{-1}(S) = \bar{f}^{-1}(S) = X$  ; alors, pour tout entier  $i \geq 0$ , le morphisme  $f$  induit un foncteur

$$R^i f_{\text{rig}*}(X/\mathcal{T}, -) : F^a\text{-Isoc}^\dagger(X/K) \longrightarrow F^a\text{-Isoc}^\dagger(S/K).$$

(5.2.2) Supposons donnés des morphismes

$$S' \hookrightarrow T' \xrightarrow{\rho'} Spf \mathcal{V}$$

où  $\rho'$  est un morphisme propre de  $\mathcal{V}$ -schémas formels,  $S'$  est un  $k$ -schéma séparé de type fini,  $j'$  est une immersion et  $\rho'$  est lisse sur un voisinage de  $S'$  dans  $T'$ . Alors le foncteur de (5.2.1) commute à tout changement de base séparé de type fini  $S' \rightarrow S$  : en particulier ce foncteur commute aux passages aux fibres en les points fermés de  $S$ .

*Démonstration.*

Pour (5.2.1), soit  $(E, \phi) \in F^a\text{-Isoc}^\dagger(X/K)$  ; pour tout entier  $i \geq 0$ , on a d'après [II, (3.4.4)] un isomorphisme

$$F_S^* R^i f_{\text{rig}*}(X/\mathcal{T}, E) \xrightarrow{\sim} R^i f_{\text{rig}*}^{(q)}(X^{(q)}/\mathcal{T}, \pi_{X/S}^*(E)).$$

L'identité de  $S$  induit un morphisme

$$\begin{array}{ccc}
\theta^i : R^i f_{\text{rig}*}^{(q)}(X^{(q)}/\mathcal{T}, \pi_{X/S}^*(E)) & \longrightarrow & R^i f_{\text{rig}*}(X/\mathcal{T}, F_{X/S}^* \pi_{X/S}^*(E)) \\
& & \parallel \\
& & R^i f_{\text{rig}*}(X/\mathcal{T}, F_X^*(E)),
\end{array}$$

et le Frobenius  $\phi$  de  $E$  induit un isomorphisme

$$R^i f_{\text{rig}*}(X/\mathcal{T}, F_X^* E) \xrightarrow{\sim} R^i f_{\text{rig}*}(X/\mathcal{T}, E).$$



Par composition de ces trois morphismes on obtient le Frobenius de  $R^i f_{\text{rig}*}(X/\mathcal{T}, E)$

$$(5.2.3) \quad \phi^i : F_S^* R^i f_{\text{rig}*}(X/\mathcal{T}, E) \longrightarrow R^i f_{\text{rig}*}(X/\mathcal{T}, E)$$

et il s'agit de prouver que  $\phi^i$  est un isomorphisme : pour ça il suffit de prouver que c'est le cas pour  $\theta^i$ . On sait déjà que  $\theta^i$  est un morphisme d'isocristaux surconvergents : d'après [B 3, (2.1.11) et (2.2.7)] il suffit de montrer que  $\theta^i$  induit un isomorphisme dans la catégorie convergente  $\text{Isoc}(S/K)$  ; d'après [B-G-R, 9.4.3/3 et 9.4.2/7] il suffit de le vérifier après passage aux fibres de  $\theta^i$  en les points fermés  $s$  de  $S$ . Pour un tel point  $s$  notons  $\mathcal{V}(s) = W(k(s)) \otimes_W \mathcal{V}$  et  $K(s)$  le corps des fractions de  $\mathcal{V}(s)$ . D'après [II, (3.4.4)] on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 R^i f_{\text{rig}*}^{(q)}(X^{(q)}/\mathcal{T}, \pi_{X/S}^*(E))_s & \xrightarrow{\theta_s} & R^i f_{\text{rig}*}(X/\mathcal{T}, F_X^*(E))_s \\
 \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\
 R^i f_{s \text{ rig}*}^{(q)}(X_s^{(q)}/\mathcal{V}(s), E_{X_s^{(q)}}) & \cdots \cdots \cdots \rightarrow & R^i f_{s \text{ rig}*}(X_s/\mathcal{V}(s), F_{X_s}^*(E_{X_s})) \\
 \parallel & & \parallel \\
 H_{\text{rig}}^i(X_s^{(q)}/K(s), E_{X_s^{(q)}}) & \cdots \cdots \cdots \rightarrow & H_{\text{rig}}^i(X_s/K(s), F_{X_s}^*(E_{X_s})) \\
 \parallel & & \parallel \\
 H_{\text{rig},c}^i(X_s^{(q)}/K(s), E_{X_s^{(q)}}) & \cdots \cdots \cdots \rightarrow & H_{\text{rig},c}^i(X_s/K(s), F_{X_s}^*(E_{X_s}))
 \end{array}$$

où les flèches verticales sont des isomorphismes ; or la flèche horizontale inférieure est un isomorphisme par [E-LS 1, prop 2.1, où il faut supposer  $X$  lisse sur  $\mathbb{F}_q$  dans le cas de la cohomologie sans support]. D'où (5.2.1). L'assertion (5.2.2) résulte de [II, (3.4.4)].  $\square$

# V. Cohomologie syntomique

## 1. Site syntomique

**1.1.** Si  $X$  est un schéma quelconque, le gros site syntomique de  $X$  est défini comme suit [SGA 3, IV, 6.3] : la catégorie sous-jacente est celle des schémas sur  $X$  et la topologie est engendrée par les familles finies surjectives de morphismes syntomiques (i.e. plats et localement intersection complète). On rappelle que les morphismes syntomiques sont ouverts, demeurent syntomiques par changement de base, et sont localement relevables le long d'une immersion fermée. Le gros site (resp. petit site) syntomique de  $X$  sera noté  $SYNT(X)$  (resp.  $synt(X)$ ) et le topos correspondant  $X_{SYNT}$  (resp.  $X_{synt}$ ) : lorsqu'on ne voudra pas distinguer entre les deux situations on notera  $\mathcal{T}(X)$  (resp.  $X_{\mathcal{T}}$ ) l'un ou l'autre de ces deux sites (resp. topos).

Soit  $j : U \hookrightarrow X$  une immersion ouverte ;  $j$  définit un couple de foncteurs adjoints  $(j_*, j^{-1})$

$$U_{\mathcal{T}} \xrightleftharpoons[j_*]{j^{-1}} X_{\mathcal{T}}.$$

Dans la suite  $X_{\mathcal{T}}$  sera annelé par un faisceau d'anneaux  $\mathcal{A}$  et  $U_{\mathcal{T}}$  sera annelé par  $j^{-1}\mathcal{A}$ , noté  $\mathcal{A}|_U$  : on note  ${}_{\mathcal{A}}X_{\mathcal{T}}$  (resp.  ${}_{\mathcal{A}|_U}U_{\mathcal{T}}$ ) la catégorie des faisceaux des  $\mathcal{A}$ -modules à gauche sur  $X_{\mathcal{T}}$  (resp. des  $\mathcal{A}|_U$ -modules à gauche sur  $U_{\mathcal{T}}$ ). Le foncteur

$$j^* : {}_{\mathcal{A}}X_{\mathcal{T}} \longrightarrow {}_{\mathcal{A}|_U}U_{\mathcal{T}}$$

admet un adjoint à gauche  $j_!$  [Mi, II, Rk 3.18] et [SGA 4, IV, § 14] défini par

$$(1.1.1) \quad \begin{cases} j_!(\mathcal{F})(X') = \mathcal{F}(X') \text{ si } X' \longrightarrow X \text{ se factorise par } U \\ \text{et } j_!(\mathcal{F})(X') = 0 \text{ sinon ;} \end{cases}$$

$j_!$  est exact [loc. cit].

Remarquons que  $j^*$  est exact puisqu'il admet un adjoint à droite et un adjoint à gauche.

De même si  $i : Z \hookrightarrow X$  est une immersion fermée,  $i$  définit un couple de foncteurs adjoints  $(i_*, i^{-1})$  :

$$Z_{\mathcal{T}} \underset{i_*}{\overset{i^{-1}}{\rightleftarrows}} X_{\mathcal{T}} ;$$

$Z_{\mathcal{T}}$  sera annelé par  $i^{-1}\mathcal{A}$ , noté  $\mathcal{A}|_Z$ .

Le foncteur

$$i^* : \mathcal{A}X_{\text{SYNT}} \longrightarrow \mathcal{A}|_Z Z_{\text{SYNT}}$$

admet un adjoint à gauche  $i_!$  [Mi, II, Rk 3.18] et  $i_!$  est exact [loc. cit.] : en particulier

$$i^* : \mathcal{A}X_{\text{SYNT}} \longrightarrow \mathcal{A}|_Z Z_{\text{SYNT}}$$

est exact.

Le foncteur

$$i^* : \mathcal{A}X_{\text{synt}} \longrightarrow \mathcal{A}|_Z Z_{\text{synt}}$$

est lui aussi exact grâce à [Mi, II, 2.6 et 3.0 p 68] et [EGA 0<sub>I</sub>, 1.4.12] car les morphismes syntomiques demeurent syntomiques par changement de base.

De plus le foncteur

$$i_* : \mathcal{A}|_Z Z_{\mathcal{T}} \longrightarrow \mathcal{A}X_{\mathcal{T}}$$

est exact, car tout morphisme syntomique se relève, localement le long d'une immersion fermée, en un morphisme syntomique.

**1.2.** Soient  $i : Z \hookrightarrow X$  une immersion fermée, et  $j : U \hookrightarrow X$  l'immersion ouverte du complémentaire de  $Z$ . Pour un  $X$ -schéma  $X'$  on note  $U' = X' \times_X U$ ,  $Z' = X' \times_X Z$ ; tout recouvrement syntomique  $W \twoheadrightarrow Z'$  se relève localement en  $\tilde{W} \rightarrow X'$  syntomique : pour alléger l'écriture on supposera le relèvement global. Par suite, si  $\tilde{U} \twoheadrightarrow U'$  est surjectif syntomique et  $\tilde{W}$  tel que ci-dessus, alors  $(\tilde{U}, \tilde{W})$  est un recouvrement syntomique de  $X'$ .

**Lemme (1.2.1).** *Avec les notations de (1.2) et pour  $\mathcal{F} \in \mathcal{A}X_{\mathcal{T}}$  le carré suivant, où les flèches sont les flèches canoniques*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \longrightarrow & j_* j^*(\mathcal{F}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ i_* i^*(\mathcal{F}) & \longrightarrow & i_* j_* j^*(\mathcal{F}) \end{array}$$

est cartésien.

*Démonstration.* On notera  $\mathcal{G}$  le produit fibré.

Pour un  $X$ -schéma  $X'$  on considère un recouvrement  $(\tilde{U}, \tilde{W})$  de  $X'$  du type précédent : comme  $\tilde{U} \rightarrow X'$  et  $\tilde{W} \rightarrow X'$  sont deux morphismes syntomiques, on est ramené à établir l'isomorphisme  $\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}$  au-dessus d'un  $X'$ -schéma syntomique  $\tilde{W}$  ; la démonstration se fait donc sur le petit site de  $X'$ . On pose  $W = \tilde{W} \times_{X'} Z'$ .

Le faisceau  $j_* j^*(\mathcal{F})$  est le faisceau associé au préfaisceau

$$\tilde{W} \longmapsto \mathcal{F}(V) \quad , \quad \text{avec } V := \tilde{W} \times_{X'} U',$$

et  $i_* i^*(\mathcal{F})$  est le faisceau associé au préfaisceau

$$\tilde{W} \longmapsto \lim_{\vec{W}'} \mathcal{F}(\mathcal{W}') \quad ,$$

la limite étant prise sur les diagrammes commutatifs

$$(1.2.2) \quad \begin{array}{ccccc} \tilde{W} & \longleftarrow & W' & \longleftarrow & W \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ X' & \longleftarrow & & & Z' \end{array}$$

avec  $W' \rightarrow \tilde{W}$  syntomique.

De même  $i_* i^* j_* j^*(\mathcal{F})$  est le faisceau associé au préfaisceau

$$\tilde{W} \longmapsto \lim_{\vec{W}'} \mathcal{F}(W' \times_{\tilde{W}} V) = \lim_{\vec{W}'} \mathcal{F}(W' \times_{X'} U'),$$

avec  $W'$  comme en (1.2.2). On remarque alors que  $(V, W')$  est un recouvrement syntomique de  $\tilde{W}$  : en effet le  $\tilde{W}$ -morphisme  $W \rightarrow W'$  fournit une section du morphisme syntomique  $W' \times_{\tilde{W}} W \rightarrow W$  ; ce dernier est donc surjectif et on conclut comme pour le recouvrement  $(\tilde{U}, \tilde{W})$  de  $X'$ .

Ainsi on a bien un isomorphisme  $\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}$  au-dessus de  $\tilde{W}$ , d'où le lemme.  $\square$

Notons  $\mathbb{T}(\mathcal{A}X_{\mathcal{T}})$  la catégorie des triplets  $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \alpha)$  où  $\mathcal{F}_1 \in {}_{\mathcal{A}|Z}Z_{\mathcal{T}}$ ,  $\mathcal{F}_2 \in {}_{\mathcal{A}|U}U_{\mathcal{T}}$  et  $\alpha$  est un morphisme  $\alpha : \mathcal{F}_1 \rightarrow i^* j_* \mathcal{F}_2$  ; les morphismes entre deux tels triplets sont définis de la manière naturelle, analogue à [Mi, II, § 3].

**Théorème(1.3).** *Soient  $i : Z \hookrightarrow X$  une immersion fermée de schémas et  $j : U \hookrightarrow X$  l'immersion ouverte du complémentaire de  $Z$ . Le foncteur*

$$\mathcal{F} \longmapsto (i^* \mathcal{F}, j^* \mathcal{F}, \alpha)$$

où  $\alpha$  est le morphisme canonique  $\alpha : i^* \mathcal{F} \rightarrow i^* j_* j^* \mathcal{F}$ , induit une équivalence de catégories entre  ${}_{\mathcal{A}}X_{\mathcal{T}}$  et  $\mathbb{T}({}_{\mathcal{A}}X_{\mathcal{T}})$ .

*Démonstration.* La démonstration est analogue à celle de Fontaine-Messing [F-M, 4.4]. Le théorème résulte du lemme (1.2.1) par la même méthode que pour le site étale [Mi, II, theo 3.10].  $\square$

En identifiant  ${}_{\mathcal{A}}X_{\mathcal{T}}$  et  $\mathbb{T}({}_{\mathcal{A}}X_{\mathcal{T}})$  via le théorème (1.3) on définit six foncteurs

$$(1.4) \quad \begin{array}{ccc} & \xleftarrow{i^*} & \xleftarrow{j_!} \\ {}_{\mathcal{A}|Z}Z_{\mathcal{T}} & \xrightarrow{i_*} {}_{\mathcal{A}}X_{\mathcal{T}} & \xrightarrow{j^*} {}_{\mathcal{A}}U_{\mathcal{T}} \\ & \xleftarrow{i^!} & \xleftarrow{j_*} \end{array}$$

dont la description est la suivante :

$$\begin{aligned} i^* : \mathcal{F}_1 &\leftarrow (\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \alpha : \mathcal{F}_1 \rightarrow i^* j_* \mathcal{F}_2), & j_! : (0, \mathcal{F}_2, 0) &\leftarrow \mathcal{F}_2 \\ i_* : \mathcal{F}_1 &\mapsto (\mathcal{F}_1, 0, 0) & j^* : (\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \alpha : \mathcal{F}_1 \rightarrow i^* j_* \mathcal{F}_2) &\mapsto \mathcal{F}_2 \\ i^! : \text{Ker } \alpha &\leftarrow (\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \alpha : \mathcal{F}_1 \rightarrow i^* j_* \mathcal{F}_2), \\ j_* : (i^* j_* \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_2, id : i^* j_* \mathcal{F}_2 \rightarrow i^* j_* \mathcal{F}_2) &\leftarrow \mathcal{F}_2. \end{aligned}$$

**Théorème(1.5).** *Avec les notations précédentes on a :*

- (1) *Chaque foncteur est adjoint à gauche de celui écrit la ligne au-dessous ; en particulier on a un isomorphisme de transitivité  $(j_1 j_2)_! = j_{1!} j_{2!}$ .*
- (2) *Les foncteurs  $i^*, i_*, j^*, j_!$  sont exacts ; les foncteurs  $j_*, i^!$  sont exacts à gauche.*
- (3) *Les composés  $i^* j_!, i^! j_!, i^! j_*, j^* i_*$  sont nuls.*
- (4) *Les foncteurs  $i_*, j_*$  et  $j_!$  sont pleinement fidèles.*
- (5) *Les foncteurs  $j_*, j^*, i^!, i_*$  envoient les injectifs sur les injectifs.*
- (6) *Pour tout  $\mathcal{F} \in {}_{\mathcal{A}}X_{\mathcal{T}}$  (resp.  $\mathcal{F} \in {}_{\mathcal{A}|U}U_{\mathcal{T}}$ ) on a des suites exactes courtes*

$$(6.1) \quad 0 \longrightarrow j_! j^* \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow i_* i^* \mathcal{F} \longrightarrow 0$$

$$(6.2) \quad 0 \longrightarrow i_* i^! \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow j_* j^* \mathcal{F}$$
*[resp. (6.3)  $0 \longrightarrow j_! \mathcal{F} \longrightarrow j_* \mathcal{F} \longrightarrow i_* i^* j_* \mathcal{F} \longrightarrow 0$ ].*

*De plus le couple de foncteurs  $(i^*, j^*)$  est conservatif.*

*Démonstration.*

Le (1) et le (2) ont déjà été vus, et l'isomorphisme de transitivité  $(j_1 j_2)_! = j_{1!} j_{2!}$  résulte de la formule  $(j_1 j_2)^* = j_2^* j_1^*$ .

Le (3) et le (4) résultent des descriptions (1.4).

Le (5) résulte de (1) et (2) et du fait qu'un foncteur avec un adjoint à gauche exact préserve les injectifs [Mi, III, 1.2].

La suite (6.3)) provient de (6.1) en remarquant que  $j^*j_*\mathcal{F} = \mathcal{F}$ .

Compte tenu des identifications (1.4) la suite (6.1) s'écrit

$$0 \longrightarrow (0, j^*\mathcal{F}, 0) \longrightarrow (i^*\mathcal{F}, j^*\mathcal{F}, \alpha) \longrightarrow (i^*\mathcal{F}, 0, 0) \longrightarrow 0.$$

Pour démontrer qu'elle est exacte il nous suffit donc de montrer qu'une suite de  ${}_{\mathcal{A}}X_{\mathcal{T}}$

$$(6.4) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'' \longrightarrow 0$$

est exacte si et seulement si les suites

$$(6.5) \quad 0 \longrightarrow i^*(\mathcal{F}') \longrightarrow i^*(\mathcal{F}) \longrightarrow i^*(\mathcal{F}'') \longrightarrow 0$$

$$(6.6) \quad 0 \longrightarrow j^*(\mathcal{F}') \longrightarrow j^*(\mathcal{F}) \longrightarrow j^*(\mathcal{F}'') \longrightarrow 0$$

de  ${}_{\mathcal{A}|Z}Z_{\mathcal{T}}$  et  ${}_{\mathcal{A}|U}U_{\mathcal{T}}$  respectivement, sont exactes, i.e. que le couple de foncteurs  $(i^*, j^*)$  est conservatif.

L'exactitude de (6.4) entraîne celle de (6.5) et (6.6) puisque  $i^*$  et  $j^*$  sont exacts.

Réciproquement, l'exactitude de (6.5) et (6.6) entraîne celle des suites

$$(6.7) \quad 0 \longrightarrow i_*i^*(\mathcal{F}') \longrightarrow i_*i^*(\mathcal{F}) \xrightarrow{\varphi_Z} i_*i^*(\mathcal{F}'') \longrightarrow 0,$$

$$(6.8) \quad 0 \longrightarrow j_*j^*(\mathcal{F}') \longrightarrow j_*j^*(\mathcal{F}) \xrightarrow{\varphi_U} j_*j^*(\mathcal{F}''),$$

$$(6.9) \quad 0 \longrightarrow i_*i^*j_*j^*(\mathcal{F}') \longrightarrow i_*i^*j_*j^*(\mathcal{F}) \longrightarrow i_*i^*j_*j^*(\mathcal{F}''),$$

d'où l'exactitude de

$$(6.10) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}''$$

grâce au lemme (1.2.1).

Donc pour tout  $\mathcal{F} \in {}_{\mathcal{A}}X_{\mathcal{T}}$  on a l'exactitude de la suite

$$0 \longrightarrow j_! j^* \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow i_* i^* \mathcal{F}.$$

Montrons la surjectivité de  $\rho : \mathcal{F} \rightarrow i_* i^* \mathcal{F}$ . Comme pour le lemme (1.2.1), dont on utilise les notations, on est ramené au petit site de  $X'$ . Soient  $\tilde{W}$  un  $X'$ -schéma syntomique,  $V := \tilde{W} \times_{X'} U'$  et  $s \in i_* i^*(\mathcal{F})(\tilde{W}) = \varinjlim_{W'} \mathcal{F}(W')$ , où  $W'$  est comme dans (1.2.2) : il existe un  $W'$  et  $s_{W'} \in \mathcal{F}(W')$  d'image  $s$ . On a vu dans la preuve du lemme (1.2.1) que  $(V, W')$  est un recouvrement syntomique de  $\tilde{W}$  : notons  $s'$  l'image de  $s$  par l'application restriction

$$i_* i^* \mathcal{F}(\tilde{W}) \longrightarrow i_* i^* \mathcal{F}(W')$$

$$s \mapsto s' ;$$

alors  $s_{W'} \in \mathcal{F}(W')$  a pour image  $s'$  par  $\rho$ .

Comme  $i_* i^*(\mathcal{F})(V) = 0$ , tout  $s_V \in \mathcal{F}(V)$  est un relèvement de  $s$  dans  $i_* i^*(\mathcal{F})(V) = 0$ . D'où la surjectivité de  $\rho$ , et l'exactitude de (6.1).

On a alors un diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & j_! j^* \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow & i_* i^* \mathcal{F} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow u & & \downarrow v & & \downarrow w & & \\ 0 & \longrightarrow & j_! j^* \mathcal{F}'' & \longrightarrow & \mathcal{F}'' & \longrightarrow & i_* i^* \mathcal{F}'' & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

L'exactitude de (6.5) et (6.6) et celle des foncteurs  $j_!$  et  $i_*$  prouve que  $u$  et  $w$  sont surjectifs : d'où la surjectivité de  $v$  ; jointe à l'exactitude de (6.10) ceci prouve que le couple  $(i^*, j^*)$  est conservatif.

L'exactitude de (6.2) en résulte via la description de  $i^!$  fournie en (1.4).  $\square$

## 2. Cohomologie syntomique à supports compacts

Soit  $X$  un schéma séparé de type fini sur un corps  $k$  ; on sait par Nagata que  $X$  est ouvert dans un  $k$ -schéma propre  $\overline{X}$  ; on note  $j : X \hookrightarrow \overline{X}$  l'immersion ouverte.

On se place sous les notations de (1.1) :  $\overline{X}_{\mathcal{T}}$  est annelé par un faisceau d'anneaux  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{F}$  est un faisceau de  $\mathcal{A}$ -modules.

Si  $\mathcal{F}$  est élément de  ${}_{\mathcal{A}}\overline{X}_{\text{synt}}$ , on notera encore  $\mathcal{F}$  son image inverse dans  ${}_{\mathcal{A}}\overline{X}_{\text{SYNT}}$  par le morphisme de topos  $\overline{X}_{\text{SYNT}} \rightarrow \overline{X}_{\text{synt}}$  et pour tout entier  $i \geq 0$ , on a [E-LS 2, (1.2)]

$$H^i(\overline{X}_{\text{synt}}, \mathcal{F}) = H^i(\overline{X}_{\text{SYNT}}, \mathcal{F}),$$

et de même pour la topologie étale.

**Proposition - Définition (2.1).** *Sous les hypothèses précédentes, si  $\mathcal{A}$  est de torsion et  $\mathcal{F}$  un élément de  ${}_{\mathcal{A}|_X}X_{\mathcal{T}}$ , le complexe  $R\Gamma(\overline{X}_{\mathcal{T}}, j_! \mathcal{F})$  est indépendant de la compactification  $\overline{X}$  de  $X$ , et sera noté*

$$R\Gamma_{\text{synt},c}(X, \mathcal{F}) ;$$

ses groupes de cohomologie seront notés

$$H_{\text{synt},c}^i(X, \mathcal{F})$$

et appelés groupes de cohomologie syntomique à supports compacts.

*Démonstration.* Si

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{j'} & \overline{X}' \\ & \searrow & \swarrow \\ & \text{Spec } k & \end{array}$$

est une autre compactification de  $X$ , on note  $\overline{X}''$  l'image schématique de  $X$  plongé diagonalement dans  $\overline{X} \times_k \overline{X}'$ ,  $j'' : X \hookrightarrow \overline{X}''$  l'immersion ouverte et  $g : \overline{X}'' \rightarrow \overline{X}$ ,  $g' : \overline{X}'' \rightarrow \overline{X}'$  les deux projections (propres).

Il s'agit de montrer que



$$(2.2) \quad R\Gamma(\overline{X}_T, j_! \mathcal{F}) = R\Gamma(\overline{X}_T'', j_!'' \mathcal{F}).$$

Ceci va résulter de la proposition plus générale suivante.

**Proposition (2.3).** *Supposons donné un carré cartésien de  $k$ -schémas*

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{j'} & \overline{X}' \\ f \downarrow & & \downarrow \overline{f} \\ X & \xrightarrow{j} & \overline{X} \end{array} \quad ,$$

où  $\overline{X}$  est propre sur  $k$ ,  $\overline{f}$  est propre,  $j, j'$  sont des immersions ouvertes. Si  $\mathcal{F}$  est un faisceau abélien de torsion sur  $X_T'$ , alors on a des isomorphismes

$$\begin{aligned} R\Gamma(\overline{X}_T, j_! Rf_* \mathcal{F}) &\simeq R\Gamma(\overline{X}_T, R\overline{f}_* j_!'' \mathcal{F}) \\ &\simeq R\Gamma(\overline{X}_T', j_!'' \mathcal{F}). \end{aligned}$$

En effet (2.1) résulte de (2.3) via le lemme suivant :

**Lemme (2.4).** *Si*

$$\begin{array}{ccc} & & \overline{X}'' \\ & \nearrow j'' & \downarrow g \\ X & & \overline{X} \\ & \searrow j & \end{array}$$

est un triangle commutatif de schémas, avec  $j, j''$  des immersions ouvertes dominantes, alors  $X$  est le produit fibré  $X \times_{\overline{X}} \overline{X}''$ .

*Démonstration de (2.4).* Soit  $U''$  le produit fibré

$$\begin{array}{ccccc} X & & & & \overline{X}'' \\ & \searrow \varphi & & \nearrow j'' & \\ & & U'' & \xrightarrow{\tilde{j}} & \overline{X}'' \\ & \searrow \text{id} & \downarrow f & & \downarrow g \\ & & X & \xrightarrow{j} & \overline{X} \end{array} \quad .$$

Puisque  $f \circ \varphi = \text{id}$ ,  $\varphi$  est une immersion fermée [EGA I, (4.3.6) (iv)]; or  $\varphi$  est étale, car  $\tilde{j} \circ \varphi = j''$  et  $\tilde{j}, j''$  sont étales [EGA IV, (17.3.5)]. Ainsi  $\varphi$

est une immersion ouverte [EGA IV, (17.9.1); EGA I, 4.2]. De plus  $\varphi$  est dominante car  $j''$  l'est; donc  $\varphi$  est surjective, car  $\varphi$  est finie. Une immersion ouverte surjective est un isomorphisme.  $\square$

*Démonstration de (2.3).* Faisons la démonstration dans le cas des gros topos syntomiques : pour les petits topos cela résulte de l'égalité

$$H^i(\overline{X}_{\text{SYNT}}, \mathcal{G}) = H^i(\overline{X}_{\text{synt}}, \mathcal{G})$$

valable pour tout faisceau abélien  $\mathcal{G}$  sur  $\text{synt}(X)$ , et tout entier  $i \geq 0$  [E-LS 2, 1.2] et [Mi, II, prop 3.1]. On désigne par un "ET" en indice les gros topos étales [E-LS 2, § 1].

On a un cube commutatif de morphismes de gros topos

$$\begin{array}{ccccc}
 & X'_{\text{SYNT}} & \xrightarrow{j'_{\text{SYNT}}} & \overline{X}'_{\text{SYNT}} & \\
 \beta_{X'} \swarrow & \vdots & & \swarrow \beta_{\overline{X}'} & \\
 X'_{\text{ET}} & \xrightarrow{j'_{\text{ET}}} & \overline{X}'_{\text{ET}} & & \\
 \downarrow f_{\text{ET}} & \downarrow f_{\text{SYNT}} & \downarrow \overline{f}_{\text{ET}} & \downarrow \overline{f}_{\text{SYNT}} & \\
 & X_{\text{SYNT}} & \xrightarrow{j_{\text{SYNT}}} & \overline{X}_{\text{SYNT}} & \xleftarrow{i_{\text{SYNT}}} Z_{\text{SYNT}} \\
 \beta_X \swarrow & \vdots & \swarrow \beta_{\overline{X}} & & \swarrow \beta_Z \\
 X_{\text{ET}} & \xrightarrow{j_{\text{ET}}} & \overline{X}_{\text{ET}} & \xleftarrow{i_{\text{ET}}} & Z_{\text{ET}}
 \end{array}$$

où  $Z = \overline{X} \setminus X$ , et un isomorphisme

$$R\Gamma(\overline{X}_{\text{SYNT}}, j_! Rf_{\text{SYNT}*} \mathcal{F}) \simeq R\Gamma(\overline{X}_{\text{ET}}, R\beta_{\overline{X}*} j_{\text{SYNT}!} Rf_{\text{SYNT}*} \mathcal{F}).$$

Supposons établie la proposition suivante :

**Proposition (2.5).** *Avec les notations précédentes, annelons  $\overline{X}_{\text{SYNT}}$  par  $\mathcal{A}$  et  $\overline{X}_{\text{ET}}$  par  $\mathcal{B} = \beta_{\overline{X}*} \mathcal{A}$ . Alors pour tout  $\mathcal{H} \in {}_{\mathcal{A}|X} X_{\text{SYNT}}$  on a un isomorphisme*

$$j_{\text{ET}!} R\beta_{X*}(\mathcal{H}) \xrightarrow{\sim} R\beta_{\overline{X}*} j_{\text{SYNT}!}(\mathcal{H}).$$

Alors on a des isomorphismes

$$R\Gamma(\overline{X}_{\text{SYNT}}, j_! Rf_{\text{SYNT}*} \mathcal{F}) \simeq R\Gamma(\overline{X}_{\text{ET}}, j_{\text{ET}!} R\beta_{X*} Rf_{\text{SYNT}*} \mathcal{F})$$

$$\begin{aligned}
&\simeq R\Gamma(\overline{X}_{\text{ET}}, j_{\text{ET}!} Rf_{\text{ET}*} R\beta_{X'^*} \mathcal{F}) \\
&\simeq R\Gamma(\overline{X}_{\text{ET}}, R\overline{f}_{\text{ET}*} j'_{\text{ET}!} R\beta_{X'^*} \mathcal{F}) \text{ [SGA 4, XVII, lemme 5.1.6] car } \mathcal{F} \\
&\text{de torsion.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\simeq R\Gamma(\overline{X}_{\text{ET}}, R\overline{f}_{\text{ET}*} R\beta_{\overline{X}'} j'_{\text{SYNT}!} \mathcal{F}) \text{ [Prop (2.5)]} \\
&\simeq R\Gamma(\overline{X}_{\text{ET}}, R\beta_{\overline{X}'} R\overline{f}_{\text{SYNT}*} j'_{\text{SYNT}!} \mathcal{F}) \\
&\simeq R\Gamma(\overline{X}_{\text{SYNT}}, R\overline{f}_{\text{SYNT}*} j'_{\text{SYNT}!} \mathcal{F}) ;
\end{aligned}$$

d'où la proposition (2.3).

*Etablissons la proposition (2.5).*

Puisque  $j_{\text{ET}!}$  et  $j_{\text{SYNT}!}$  sont exacts, il suffit de montrer l'isomorphisme  $j_{\text{ET}!} \beta_{X^*} \xrightarrow{\sim} \beta_{\overline{X}'} j_{\text{SYNT}!}$ .

Par le lemme du serpent appliqué au morphisme de suites exactes

$$\begin{array}{ccccccc}
(2.5.1) & 0 & \longrightarrow & j_{\text{ET}!} \beta_{X^*} \mathcal{H} & \longrightarrow & j_{\text{ET}*} \beta_{X^*} \mathcal{H} & \longrightarrow & i_{\text{ET}*} i_{\text{ET}}^* j_{\text{ET}*} \beta_{X^*} \mathcal{H} & \longrightarrow & 0 \\
& & & \downarrow & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \\
& & & & & i_{\text{ET}*} i_{\text{ET}}^* \beta_{\overline{X}'} j_{\text{SYNT}*} \mathcal{H} & & \downarrow & & \\
& & & & & \downarrow & & i_{\text{ET}*} \beta_{Z^*} i_{\text{SYNT}}^* j_{\text{SYNT}*} \mathcal{H} & & \\
& & & & & \downarrow \simeq & & & & \\
& 0 & \longrightarrow & \beta_{\overline{X}'} j_{\text{SYNT}!} \mathcal{H} & \longrightarrow & \beta_{\overline{X}'} j_{\text{SYNT}*} \mathcal{H} & \longrightarrow & \beta_{\overline{X}'} i_{\text{SYNT}*} i_{\text{SYNT}}^* j_{\text{SYNT}*} \mathcal{H} , & & 
\end{array}$$

il nous suffit de montrer que, pour tout faisceau  $\mathcal{G}$ , on a un isomorphisme

$$(2.5.2) \quad i_{\text{ET}*} i_{\text{ET}}^* \beta_{\overline{X}'}(\mathcal{G}) \xrightarrow{\varphi} i_{\text{ET}*} \beta_{Z^*} i_{\text{SYNT}}^*(\mathcal{G}).$$

Or  $i_{\text{ET}*} i_{\text{ET}}^* \beta_{\overline{X}'}(\mathcal{G})$  est le faisceau associé au préfaisceau

$$\begin{aligned}
X' \mapsto i_{\text{ET}}^* \beta_{\overline{X}'}(\mathcal{G})(Z \times_{\overline{X}} \overline{X}') &= \lim_{\overline{X}''} \beta_{\overline{X}'}(\mathcal{G})(X'') \\
&= \lim_{\overline{X}''} \mathcal{G}(X'') \simeq \mathcal{G}(Z \times_{\overline{X}} \overline{X}')
\end{aligned}$$

où  $\overline{X}'$  est un  $\overline{X}$ -schéma et la limite inductive est prise sur les diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc} X'' & \longleftarrow & Z \times_{\overline{X}} \overline{X}' \\ \downarrow & & \downarrow \\ \overline{X} & \longleftarrow & Z \end{array}$$

où  $X''$  est un  $\overline{X}$ -schéma ; comme  $i_{\text{ET}*} \beta_{Z*} i_{\text{SYNT}}^*(\mathcal{G})$  a la même description, il en résulte que  $\varphi$  est un isomorphisme.  $\square$

**Théorème (2.6).** *Soient  $i_1 : Z \hookrightarrow X$  une immersion fermée entre deux  $k$ -schémas séparés de type fini,  $j_1 : \cup \hookrightarrow X$  l'immersion ouverte du complémentaire et  $\mathcal{F} \in {}_{\mathcal{A}}X_{\mathcal{T}}$ , où  $\mathcal{A}$  est un faisceau d'anneaux de torsion. Alors on a une suite exacte longue de cohomologie syntomique à supports compacts*

$$\rightarrow H_{\text{synt},c}^i(U, \mathcal{F}|_U) \rightarrow H_{\text{synt},c}^i(U, \mathcal{F}) \rightarrow H_{\text{synt},c}^i(Z, \mathcal{F}|_Z) \rightarrow H_{\text{synt},c}^{i+1}(U, \mathcal{F}|_U) \rightarrow$$

*Démonstration.* Choisissons une compactification  $\overline{X}$  de  $X$  au-dessus de  $k$ ,  $\overline{j} : X \hookrightarrow \overline{X}$  l'immersion ouverte dominante et soit  $\overline{Z}$  l'adhérence schématique de  $Z$  dans  $\overline{X}$ . On a alors un diagramme commutatif à carrés cartésiens

$$(2.6.1) \quad \begin{array}{ccc} Z \hookrightarrow \overline{Z} & \xrightarrow{\overline{j}} & \overline{Z} \\ i_1 \downarrow & & \downarrow i \\ X \hookrightarrow \overline{X} & \xrightarrow{\overline{j}} & \overline{X} \\ j_1 \uparrow & & \uparrow j \\ U & \xlongequal{\quad} & U \end{array}$$

où  $i$  est une immersion fermée et  $j, \overline{j}$  des immersions ouvertes. En appliquant le foncteur exact  $\overline{j}_!$  à la suite exacte

$$0 \longrightarrow j_{1!} j_1^* \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow i_{1*} i_1^* \mathcal{F} \longrightarrow 0,$$

on obtient la suite exacte

$$(2.6.2) \quad 0 \longrightarrow j_! j_1^* \mathcal{F} \longrightarrow \overline{j}_! \mathcal{F} \longrightarrow \overline{j}_! i_{1*} i_1^* \mathcal{F} \longrightarrow 0$$

car  $\overline{j}_! j_{1!} = j_!$  [Théo (1.5) (1)]. Or l'exactitude des foncteurs  $i_{1*}$  et  $i_*$ , jointe à la proposition (2.3), donne un isomorphisme

$$R\Gamma(\overline{X}_T, \overline{j}_! i_{1*} i_1^* \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} R\Gamma(\overline{Z}_T, \overline{j}'_! i_1^* \mathcal{F}) ;$$

ainsi, par application du foncteur  $R\Gamma(\overline{X}_T, -)$  à la suite exacte (2.6.2) on obtient, via (2.1), un triangle distingué

$$(2.6.3) \quad R\Gamma_{\text{synt},c}(U, \mathcal{F}|_U) \longrightarrow R\Gamma_{\text{synt},c}(X, \mathcal{F}) \longrightarrow R\Gamma_{\text{synt},c}(Z, \mathcal{F}|_Z),$$

qui fournit à son tour la suite exacte longue du théorème.  $\square$

### 3. Comparaison avec la cohomologie étale et la cohomologie rigide

**3.0.** On suppose dans ce § 3 que le corps  $k$  contient  $\mathbb{F}_q$ ,  $q = p^a$ . On désigne par  $C(k)$  un anneau de Cohen de  $k$  de caractéristique 0 et par  $K_0$  le corps des fractions de  $C(k)$ .

Comme en III (3.3),  $\mathcal{V}$  est un anneau de valuation discrète complet, d'uniformisante  $\pi$  et  $\sigma : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$  un relèvement de la puissance  $q$  de  $k$  tel que  $\sigma(\pi) = \pi$  construit via [Et 5, 1.1].

On note  $e$  l'indice de ramification de  $\mathcal{V}$ ,  $K = \text{Frac}(\mathcal{V})$ ,  $\mathcal{V}^\sigma = \text{Ker}\{1 - \sigma : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}\}$ ,  $\mathcal{V}_n = \mathcal{V}/\pi^{n+1}\mathcal{V}$ ,  $\mathcal{V}_n^\sigma = \mathcal{V}^\sigma/\pi^{n+1}\mathcal{V}^\sigma$  et  $K^\sigma = \text{Frac}(\mathcal{V}^\sigma)$ .

Si  $X$  est un schéma on dit qu'un  $\mathcal{V}_n^\sigma$ -module  $\mathcal{F}$  sur  $\text{ét}(X)$  est localement trivial (on dit aussi constant-tordu constructible ou encore localement constant constructible) s'il est localement isomorphe à une somme directe finie de copies de  $\mathcal{V}_n^\sigma$  : c'est alors la même chose de dire qu'il est localement trivial sur  $\text{SYNT}(X)$  [E-LS 2, 5.1].

Un  $\mathcal{V}^\sigma$ -faisceau lisse  $\mathcal{F}$  (localement libre de rang fini) sur  $X$  est un système projectif  $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  où, pour tout  $n$ ,  $\mathcal{F}_n$  est un  $\mathcal{V}_n^\sigma$ -module localement trivial sur  $\text{ét}(X)$  et pour  $n' \geq n$ ,  $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_{n'} \otimes \mathcal{V}_n^\sigma$ . Les  $K^\sigma$ -faisceaux lisses sont les  $\mathcal{V}^\sigma$ -faisceaux lisses à isogénie près.

Pour un  $\mathcal{V}^\sigma$ -faisceau lisse  $\mathcal{F}$  (resp. un  $K^\sigma$ -faisceau lisse  $\mathcal{F}_\mathbb{Q}$ ) sur  $X$  on pose, pour tout entier  $i \geq 0$

$$H_{\text{synt},c}^i(X, \mathcal{F}) := \varprojlim_n H_{\text{synt},c}^i(X, \mathcal{F}_n)$$

$$[\text{resp.} \quad H_{\text{synt},c}^i(X, \mathcal{F}_{\mathbb{Q}}) = (\varprojlim_n H_{\text{synt},c}^i(X, \mathcal{F}_n)) \otimes_{\mathcal{V}^\sigma} K^\sigma] .$$

**Proposition (3.1).** *Soient  $X$  un schéma et  $\mathcal{F}$  un faisceau abélien sur  $\text{ét}(X)$  ; on note encore  $\mathcal{F}$  son image inverse par le morphisme de topos  $X_{\text{synt}} \rightarrow X_{\text{ét}}$ . Alors, pour tout entier  $i \geq 0$ , on a un isomorphisme*

$$H_{\text{ét},c}^i(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} H_{\text{synt},c}^i(X, \mathcal{F}).$$

*Démonstration.* Résulte de [E-LS 2, 1.3].  $\square$

**Théorème (3.2).** *Supposons  $k$  séparablement clos. Soient  $X$  un  $k$ -schéma séparé de type fini,  $\mathcal{F}_{\mathbb{Q}}$  un  $K^\sigma$ -faisceau lisse sur  $X$  et  $f : Y \rightarrow X$  sur  $k$ -morphisme fini étale galoisien de groupe  $G$ . Alors, pour tout entier  $i \geq 0$ , on a des isomorphismes de  $K^\sigma$ -espaces vectoriels de dimension finie*

$$\begin{aligned} H_{\text{ét},c}^i(X, \mathcal{F}_{\mathbb{Q}}) &\simeq H_{\text{ét},c}^i(X, f_* f^* \mathcal{F}_{\mathbb{Q}})^G \simeq H_{\text{ét},c}^i(Y, f^* \mathcal{F}_{\mathbb{Q}})^G \\ &\simeq H_{\text{synt},c}^i(X, \mathcal{F}_{\mathbb{Q}}) \simeq H_{\text{synt},c}^i(X, f_* f^* \mathcal{F}_{\mathbb{Q}})^G \simeq H_{\text{synt},c}^i(Y, f^* \mathcal{F}_{\mathbb{Q}})^G. \end{aligned}$$

*Démonstration.* Compte tenu de (3.1) il suffit de montrer l'assertion pour la cohomologie étale. Puisque  $f$  est fini,  $f_*$  est exact, et on est ramené à montrer l'isomorphisme

$$(3.2.1) \quad H_{\text{ét},c}^i(X, \mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{V}^\sigma} K^\sigma \simeq [H_{\text{ét},c}^i(X, f_* f^* \mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{V}^\sigma} K^\sigma]^G$$

pour un  $\mathcal{V}^\sigma$ -faisceau lisse  $\mathcal{F}$ .

Comme  $\mathcal{F}$  est localement libre on établit le lemme suivant comme [Et 2, III (3.1.2)].

**Lemme (3.2.2).** *Sous les hypothèses précédentes, on a un isomorphisme*

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} (f_* f^* (\mathcal{F}))^G.$$

Soient  $\overline{X}$  une compactification de  $X$  au-dessus de  $k$  et  $j : X \hookrightarrow \overline{X}$  l'immersion ouverte correspondante. Par exactitude du foncteur  $j_!$  on déduit de (3.2.2) des isomorphismes

$$(3.2.3) \quad j_! \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} j_! (f_* f^* \mathcal{F})^G \simeq (j_! f_* f^* \mathcal{F})^G.$$

Le corps  $k$  étant séparablement clos, les groupes  $H_{\text{ét},c}^i(X, \mathcal{F}_n)$  et  $H_{\text{ét},c}^i(X, f_* f^* \mathcal{F}_n)$  sont des  $\mathcal{V}_n^\sigma$ -modules de type fini [SGA 4, XVII, 5.3.8] ; par suite les groupes  $H_{\text{ét},c}^i(X, \mathcal{F})$  et  $H_{\text{ét},c}^i(X, f_* f^* \mathcal{F})$  sont des  $\mathcal{V}^\sigma$ -modules de type fini, engendrés par tout sous-ensemble qui les engendre mod.  $\pi$ .

On achève la démonstration de (3.2) comme [Et 2, III, 3.1.1].  $\square$

**3.3.** Soient  $X$  un  $k$ -schéma et  $\mathcal{H}$  un  $\mathcal{V}_n^\sigma$ -module localement trivial sur  $\text{SYNT}(X)$ . On considère le morphisme de topos annelés [E-LS 2, 5.3]

$$u = u_{X/\mathcal{V}_n - \text{SYNT}}^{(m)} : ((X/\mathcal{V}_n)_{\text{CRIS-SYNT}}^{(m)}, \mathcal{O}_{X/\mathcal{V}_n}^{(m)}) \longrightarrow (X_{\text{SYNT}}, \mathcal{V}_n^\sigma)$$

et on note

$$T^{(m)}(\mathcal{H}) := u^*(\mathcal{H}) = \mathcal{H} \otimes_{\mathcal{V}_n^\sigma} \mathcal{O}_{X/\mathcal{V}_n}^{(m)},$$

et

$$(3.3.1) \quad \begin{aligned} T^{(m)}(\mathcal{H})^{\text{cris}} &:= u_*(T^{(m)}(\mathcal{H})) = u_* u^*(\mathcal{H}) \text{ [E-LS frm-e, 1.11]} \\ &= \mathcal{H} \otimes_{\mathcal{V}_n^\sigma} u_*(\mathcal{O}_{X/\mathcal{V}_n}^{(m)}) = \mathcal{H} \otimes_{\mathcal{V}_n^\sigma} \mathcal{O}_{n,X}^{m-\text{cris}}, \end{aligned}$$

où l'on a posé  $\mathcal{O}_{n,X}^{m-\text{cris}} := u_*(\mathcal{O}_{X/\mathcal{V}_n}^{(m)})$ .

Soient  $i : Z \hookrightarrow X$  une immersion fermée et  $j : U \hookrightarrow X$  l'immersion ouverte du complémentaire :  $j$  et  $i$  définissent respectivement des morphismes de topos [cf (1.1)]

$$j : U_{\text{SYNT}} \longrightarrow X_{\text{SYNT}},$$

$$i : Z_{\text{SYNT}} \longrightarrow X_{\text{SYNT}},$$

et même des morphismes de topos annelés

$$(3.3.2) \quad j_{\mathcal{V}} : (U_{\text{SYNT}}, \mathcal{V}_{n,U}^\sigma) \longrightarrow (X_{\text{SYNT}}, \mathcal{V}_{n,X}^\sigma)$$

$$(3.3.3) \quad i_{\mathcal{V}} : (Z_{\text{SYNT}}, \mathcal{V}_{n,Z}^\sigma) \longrightarrow (X_{\text{SYNT}}, \mathcal{V}_{n,X}^\sigma)$$

où  $\mathcal{V}_{n,U}^\sigma = j^{-1}(\mathcal{V}_{n,X}^\sigma)$  ,  $\mathcal{V}_{n,Z}^\sigma = i^{-1}(\mathcal{V}_{n,X}^\sigma)$ ,

$\mathcal{V}_{n,X}^\sigma$  étant le faisceau d'anneaux  $\mathcal{V}_n^\sigma$  sur  $X_{\text{SYNT}}$ .

On déduit alors de (1.4) l'existence de six foncteurs

$$\begin{array}{ccc}
 & \xleftarrow{i_{\mathcal{V}}^*} & \xleftarrow{j_{\mathcal{V}}!} \\
 (3.3.4) \quad & \mathcal{V}_{n,Z}^{\sigma} Z_{\text{SYNT}} \xrightarrow{i_{\mathcal{V}}^*} \mathcal{V}_{n,X}^{\sigma} X_{\text{SYNT}} \xrightarrow{j_{\mathcal{V}}^*} \mathcal{V}_{n,U}^{\sigma} U_{\text{SYNT}} & \\
 & \xleftarrow{i_{\mathcal{V}}^!} & \xleftarrow{j_{\mathcal{V}}^*}
 \end{array}$$

**Lemme (3.3.5).** *Sous les hypothèses précédentes on a des isomorphismes de faisceaux sur les gros sites syntomiques :*

$$(3.3.5.1) \quad j^{-1} \mathcal{O}_{n,X}^{m-\text{cris}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{n,U}^{m-\text{cris}}$$

$$(3.3.5.2) \quad i^{-1} \mathcal{O}_{n,X}^{m-\text{cris}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{n,Z}^{m-\text{cris}}.$$

*Démonstration.* Comme  $j^{-1} \mathcal{O}_{n,X}^{m-\text{cris}}$  est le faisceau associé au préfaisceau qui à tout  $U$ -schéma  $U'$  associe

$$\begin{aligned}
 \mathcal{O}_{n,X}^{m-\text{cris}}(U') &= \Gamma((U'/\mathcal{V}_n)_{\text{CRIS-SYNT}}^{(m)}, \mathcal{O}_{U'/\mathcal{V}_n}^{(m)}) \text{ [E-LSfrm-e, 1.10]} \\
 &= \mathcal{O}_{n,U}^{m-\text{cris}}(U'),
 \end{aligned}$$

on a bien (3.3.5.1). De même pour (3.3.5.2).  $\square$

Grâce au lemme (3.3.5) les morphismes de topos  $j$  et  $i$  ci-dessus induisent des morphismes de topos annelés

$$(3.3.6) \quad j_{\mathcal{O}} : (U_{\text{SYNT}}, \mathcal{O}_{n,U}^{m-\text{cris}}) \longrightarrow (X_{\text{SYNT}}, \mathcal{O}_{n,X}^{m-\text{cris}})$$

$$(3.3.7) \quad i_{\mathcal{O}} : (Z_{\text{SYNT}}, \mathcal{O}_{n,Z}^{m-\text{cris}}) \longrightarrow (X_{\text{SYNT}}, \mathcal{O}_{n,X}^{m-\text{cris}})$$

et six foncteurs

$$\begin{array}{ccc}
 & \xleftarrow{i_{\mathcal{O}}^*} & \xleftarrow{j_{\mathcal{O}}!} \\
 (3.3.8) \quad & \mathcal{O}_{n,Z}^{m-\text{cris}} Z_{\text{SYNT}} \xrightarrow{i_{\mathcal{O}}^*} \mathcal{O}_{n,X}^{m-\text{cris}} X_{\text{SYNT}} \xrightarrow{j_{\mathcal{O}}^*} \mathcal{O}_{n,U}^{m-\text{cris}} U_{\text{SYNT}} & \\
 & \xleftarrow{i_{\mathcal{O}}^!} & \xleftarrow{j_{\mathcal{O}}^*}
 \end{array}$$



En utilisant la description (1.4), ou le théorème (1.5) (6.1) on en déduit la proposition suivante :

**Proposition (3.3.9).** *Sous les hypothèses et notations de (3.3) on a :*

(1) *Si  $\mathcal{G}$  est un  $\mathcal{O}_{n,U}^{m-\text{cris}}$ -module, alors on a un isomorphisme canonique*

$$j_{\mathcal{V}!}(\mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} j_{\mathcal{O}!}(\mathcal{G}).$$

(2) *Si  $\mathcal{G}$  est un  $\mathcal{V}_{n,U}^\sigma$ -module, alors on a des isomorphismes canoniques*

$$\begin{aligned} j_{\mathcal{V}!}(\mathcal{G} \otimes_{\mathcal{V}_{n,U}^\sigma} \mathcal{O}_{n,U}^{m-\text{cris}}) &\simeq j_{\mathcal{O}!}(\mathcal{G} \otimes_{\mathcal{V}_{n,U}^\sigma} \mathcal{O}_{n,U}^{m-\text{cris}}) \\ &\simeq j_{\mathcal{V}!}(\mathcal{G}) \otimes_{\mathcal{V}_{n,X}^\sigma} j_{\mathcal{V}!}(\mathcal{O}_{n,U}^{m-\text{cris}}) \simeq j_{\mathcal{V}!}(\mathcal{G}) \otimes_{\mathcal{V}_{n,X}^\sigma} j_{\mathcal{O}!}(\mathcal{O}_{n,U}^{m-\text{cris}}) \\ &\simeq j_{\mathcal{V}!}(\mathcal{G}) \otimes_{\mathcal{V}_{n,X}^\sigma} \mathcal{O}_{n,X}^{m-\text{cris}}. \end{aligned}$$

Les formules du (2) sont à comparer à celles de [SGA 4, IV, prop 12.11 (b)].

Supposons à présent que  $\mathcal{F}$  est un  $\mathcal{V}_n^\sigma$ -module localement trivial sur  $\text{SYNT}(U)$  :  $\mathcal{F}$  étant localement trivial, le morphisme  $F^* : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^{(q)} = F_X^{-1}(\mathcal{F})$  est un isomorphisme ; on pose  $F = F^{*-1} : \mathcal{F}^{(q)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}$  et  $\phi_U = T^{(m)}(F) : T^{(m)}(\mathcal{F})^{(q)} = T^{(m)}(\mathcal{F}^{(q)}) \xrightarrow{\sim} T^{(m)}(\mathcal{F})$  qui munit  $T^{(m)}(\mathcal{F})$  d'une structure de  $F$ - $m$ -cristal localement trivial [E-LS 2, 5.3].

On note encore  $\phi_U : T^{(m)}(\mathcal{F})^{\text{cris}} \rightarrow T^{(m)}(\mathcal{F})^{\text{cris}}$  l'homomorphisme obtenu en composant  $\phi_U^{\text{cris}}$  avec  $F^* : T^{(m)}(\mathcal{F})^{\text{cris}} \rightarrow T^{(m)}(\mathcal{F})^{\text{cris}(q)}$  [E-LS 2, 5.2]. Alors la suite exacte de [E-LS 2, théo 5.5] s'interprète, via (3.3.1), comme une suite exacte sur  $\text{SYNT}(U)$  :

$$(3.3.10) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow u_* u^*(\mathcal{F}) \xrightarrow{1-\phi_U} u_* u^*(\mathcal{F}) \longrightarrow 0$$

ou encore

$$(3.3.11) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{V}_n^\sigma} \mathcal{O}_{n,U}^{m-\text{cris}} \xrightarrow{1-\phi_U} \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{V}_n^\sigma} \mathcal{O}_{n,U}^{m-\text{cris}} \longrightarrow 0.$$

En lui appliquant le foncteur exact  $j_{\mathcal{V}!}$  [théo 1.5], on obtient encore une suite exacte, ce qui, compte tenu de (3.3.9), établit le théorème suivant :

**Théorème (3.3.12).** *Sous les notations de (3.3), si  $\mathcal{F}$  est un  $\mathcal{V}_n^\sigma$ -module localement trivial sur  $\text{SYNT}(U)$ , alors on a des suites exactes de  $\mathcal{V}_n^\sigma$ -modules sur  $\text{SYNT}(X)$  :*

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & j_{\mathcal{V}}! \mathcal{F} & \longrightarrow & j_{\mathcal{O}}!(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{V}_n^\sigma} \mathcal{O}_{n,U}^{m-\text{cris}}) & \xrightarrow{1-\phi} & j_{\mathcal{O}}!(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{V}_n^\sigma} \mathcal{O}_{n,U}^{m-\text{cris}}) \longrightarrow 0 \\
& & \parallel & & \downarrow \simeq & & \\
0 & \longrightarrow & j_{\mathcal{V}}! \mathcal{F} & \longrightarrow & j_{\mathcal{V}}!(\mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{V}_n^\sigma} \mathcal{O}_{n,X}^{m-\text{cris}} & \xrightarrow{1-\phi} & j_{\mathcal{V}}!(\mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{V}_n^\sigma} \mathcal{O}_{n,X}^{m-\text{cris}} \longrightarrow 0
\end{array}$$

où  $\phi = j_{\mathcal{V}}!(\phi_U)$ .

Les suites exactes du théorème (3.3.12) vont nous permettre en passant à la cohomologie dans le théorème suivant de relier cohomologie étale et cohomologie rigide.

**Théorème (3.3.13).** *On suppose le corps  $k$  parfait. Soient  $X$  un  $k$ -schéma séparé de type fini,  $\mathcal{F}_{\mathbb{Q}}$  un  $K^\sigma$ -faisceau lisse sur  $X$  et  $E_K \in F^a\text{-Isoc}(X/K)^\circ$  le  $F$ -isocrystal convergent associé à  $\mathcal{F}_{\mathbb{Q}}$  [E-LS 2; 5.6] et on suppose que  $E_K$  provient de  $E_K^\dagger \in F^a\text{-Isoc}^\dagger(X/K)^\circ$  par le foncteur d'oubli  $F^a\text{-Isoc}^\dagger(X/K)^\circ \rightarrow F^a\text{-Isoc}(X/K)^\circ$ . On note  $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  un  $\mathcal{V}^\sigma$ -faisceau lisse associé à  $\mathcal{F}_{\mathbb{Q}}$  et  $E_n^{m-\text{cris}} = T^{(m)}(\mathcal{F}_n)^{\text{cris}}$  [cf (3.3.1)].*

Alors on a :

(1) *Il existe un isomorphisme canonique*

$$R\Gamma_{\text{rig},c}(X/K, E_K^\dagger) = R\varprojlim_m [(R\varprojlim_n R\Gamma_{\text{synt},c}(X, E_n^{m-\text{cris}})) \otimes \mathbb{Q}].$$

(2) *Si de plus  $k$  est algébriquement clos, il existe, pour tout entier  $i \geq 0$ , une suite exacte courte*

$$0 \rightarrow H_{\text{ét},c}^i(X, \mathcal{F}_{\mathbb{Q}}) \rightarrow H_{\text{rig},c}^i(X/K, E_K^\dagger) \xrightarrow{1-\phi} H_{\text{rig},c}^i(X/K, E_K^\dagger) \rightarrow 0.$$

*Démonstration.*

*Prouvons le (1).* Comme la cohomologie rigide à supports compacts ne dépend que du schéma réduit sous-jacent à  $X$ , on peut supposer  $X$  réduit. On va faire une récurrence sur la dimension de  $X$ .

Si  $\dim X = 0$ , alors  $X = \bigcup_{\text{finie}} \text{Spec} A_i$  où  $A_i$  est artinien [Eis., cor 9.1] car  $X$  est de type fini sur  $k$ , et  $A_i$  est un produit fini  $\prod_j A_{i,m_j}$  d'anneaux artiniens locaux réduits ( $X$  est réduit) : ainsi  $A_{i,m_j}$  est un corps [Bour, A VIII, § 6, n° 4, prop 9]  $k_{ij}$  extension finie du corps parfait  $k$  [Eis, cor 2.15]. En particulier  $X$  est fini étale sur  $k$ , et alors l'assertion du théorème est prouvée dans

[E-LS 2, prop 3.11].

Si  $\dim X \geq 1$ , il existe, puisque  $k$  est parfait et  $X$  réduit, un ouvert non vide  $U \hookrightarrow X$  qui est lisse sur  $k$ , de fermé complémentaire  $Z$  tel que  $\dim Z < \dim X$ . Comme les deux foncteurs  $R\Gamma_{\text{rig},c}(X/K, -)$  et  $R\varprojlim_m [(R\varprojlim_n R\Gamma_{\text{synt},c}(X, (-)_n^{m-\text{cris}})) \otimes \mathbb{Q}]$  donnent lieu à des triangles distingués faisant intervenir  $X$ ,  $U$  et  $Z$  on est ramené à prouver le théorème pour  $U$ . Donc on peut supposer  $X$  lisse connexe et aussi  $K' = K$  avec  $e \leq p - 1$ , avec  $\mathcal{F}$  un  $\mathcal{V}^\sigma$ -faisceau lisse sur  $X$ , associé à un  $F$ -cristal unité  $E$  sur  $X/\mathcal{V}$ , d'isocrystal convergent unité  $E_K$  par [B 3, (2.4.2)] supposé provenir de  $E_K^\dagger \in F^a\text{-Isoc}(X/K)^\circ$ .

Notons  $\overline{X}$  une compactification de  $X$  sur  $k$ . D'après le théorème de monodromie finie "générique" de Tsuzuki [Tsu 2, theo 3.1] il existe un  $k$ -schéma projectif et lisse  $\overline{X}'$ , un  $k$ -morphisme propre surjectif  $\overline{w} : \overline{X}' \rightarrow \overline{X}$  génériquement étale, tel qu'en posant  $X' = \overline{w}^{-1}(X)$ ,  $j' : X' \hookrightarrow \overline{X}'$  l'immersion ouverte, il existe un unique  $N^\dagger \in F^a\text{-Isoc}^\dagger(\overline{X}'/K)^\circ$  avec  $\overline{w}^*(E_K^\dagger) \simeq (j')^\dagger(N^\dagger)$ .

Notons  $U \hookrightarrow X$  un ouvert dense tel que la restriction  $w : U' = U \times_{\overline{X}} \overline{X}' \rightarrow U$  de  $\overline{w}$  soit finie étale : quitte à rétrécir  $U$  on peut supposer  $U$  affine et intégralement clos, de même pour  $U'$ . Puisque  $U$  et  $U'$  sont connexes il existe un morphisme fini étale  $s : U'' \rightarrow U'$  tel que le composé  $f : w \circ s : U'' \rightarrow U$  soit fini étale galoisien de groupe noté  $G$  [Mi, I, Rk 5.4]. Désignons par  $\overline{X}''$  la fermeture intégrale de  $\overline{X}'$  dans  $U''$  : on obtient un diagramme commutatif à carrés cartésiens

$$\begin{array}{ccccc}
 U'' & \xrightarrow{j''} & \overline{X}'' & & \\
 \downarrow s & & \downarrow \overline{s} & & \\
 U' & \xrightarrow{j'} & \overline{X}' & & \\
 \downarrow w & & \downarrow \overline{w} & & \\
 U & \xrightarrow{j} & \overline{X} & & \\
 & \searrow j_U & & & 
 \end{array}$$

où  $\overline{s}$  est un morphisme fini et les flèches horizontales sont des immersions ouvertes : en particulier  $\overline{X}''$  est une compactification de  $U''$ . On note  $\overline{Z}$  l'adhérence schématique de  $Z$  dans  $\overline{X}$  et  $j_Z : Z \hookrightarrow \overline{Z}$  l'immersion ouverte dominante.

Puisque  $\overline{X'}$  est propre et lisse sur  $k$ , il existe, d'après (3.3.13) un  $F$ -cristal unité  $M$  sur  $\overline{X'}$  tel que  $N^\dagger \simeq M^{an}$ . Posons  $\overline{\mathcal{M}} = \overline{s}_{\text{CRIS}}^*(M)$ ,  $\mathcal{M} = j_{\text{CRIS}}''^*(\overline{\mathcal{M}})$ ; d'après [B 3, (2.42)]  $\mathcal{M}$  est isogène à  $f_{\text{CRIS}}^*(E|_U)$ , i.e. il existe un entier  $r \geq 0$  et des morphismes

$$\alpha : \mathcal{M} \longrightarrow f_{\text{CRIS}}^*(E|_U),$$

$$\beta : f_{\text{CRIS}}^*(E|_U) \longrightarrow \mathcal{M},$$

tels que  $\alpha \circ \beta = p^r$  et  $\beta \circ \alpha = p^r$ . On notera  $\overline{\mathcal{M}}_K$  le  $F$ -isocristal (sur)convergent sur  $\overline{X''}$  associé à  $\overline{\mathcal{M}}$  et  $\mathcal{M}_K^\dagger = j''^\dagger(\overline{\mathcal{M}}_K)$ . D'après [B-M 1, cor du théo 6] le  $F$ -cristal unité  $\overline{\mathcal{M}}$  est le cristal de Dieudonné d'un groupe  $p$ -divisible étale, dont le  $\mathcal{V}^\sigma$ -faisceau lisse associé sera noté  $\overline{\mathcal{G}} = (\overline{\mathcal{G}}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ; on pose  $\mathcal{G} = j''^*(\overline{\mathcal{G}})$ .

L'isogénie  $\alpha$  (resp  $\beta$ ) fournit une isogénie  $\alpha_{\mathcal{G}} : \mathcal{G} \rightarrow f^*(\mathcal{F}|_U)$  (resp  $\beta_{\mathcal{G}} : f^*(\mathcal{F}|_U) \rightarrow \mathcal{G}$ ) telle que  $\alpha_{\mathcal{G}} \circ \beta_{\mathcal{G}} = p^r$  et  $\beta_{\mathcal{G}} \circ \alpha_{\mathcal{G}} = p^r$ .

L'isogénie  $\alpha$  (resp  $\beta$ ) fournit, par la construction de Berthelot [B 3, (2.4.2)], un isomorphisme sur les  $F$ -isocristaux convergents associés

$$\alpha_K : \mathcal{M}_K \xrightarrow{\sim} f_{\text{rig}}^*(E_{K|U})$$

$$(\text{resp } \beta_K : f_{\text{rig}}^*(E_{K|U}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_K).$$

D'après [Et 5, théo 5] l'isomorphisme  $\alpha_K$  (resp.  $\beta_K$ ) se relève de manière unique en un isomorphisme

$$\alpha_K^\dagger : \mathcal{M}_K^\dagger \xrightarrow{\sim} f_{\text{rig}}^*(E_{K|U}^\dagger)$$

$$(\text{resp } \beta_K^\dagger : f_{\text{rig}}^*(E_{K|U}^\dagger) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_K^\dagger);$$

de même l'action de  $G$  sur  $f_{\text{rig}}^*(E_{K|U})$  se relève de manière unique à  $f_{\text{rig}}^*(E_{K|U}^\dagger)$ .

D'autre part, par le théorème (3.3.12), on a un morphisme de suites exactes sur  $\text{SYNT}(\overline{X''})$

$$\begin{array}{ccccccc} (S_1) & 0 & \longrightarrow & j_! f^*(\mathcal{F}_n|_U) & \longrightarrow & j_! f_{\text{CRIS}}^*(E|_U)_n^{m-\text{cris}} & \xrightarrow{1-\phi} j_! f_{\text{CRIS}}^*(E|_U)_n^{m-\text{cris}} \longrightarrow 0 \\ & & & \downarrow j_!''(\beta_{\mathcal{G}})_n & & \downarrow j_!''(\beta)_n^m & \downarrow j_!''(\beta)_n^m \\ (S_2) & 0 & \longrightarrow & j_!'' \mathcal{G}_n & \longrightarrow & j_!'' \mathcal{M}_n^{m-\text{cris}} & \xrightarrow{1-\phi} j_!'' \mathcal{M}_n^{m-\text{cris}} \longrightarrow 0 \end{array}$$

Le groupe  $G$  agit de manière équivariante sur la suite exacte  $(S_1)$ , donc sur le triangle distingué  $\mathcal{C}''(S_1)$  obtenu en lui appliquant le foncteur

$$\mathcal{C}'' := R \varprojlim_m \{ (R \varprojlim_n R\Gamma(\overline{X}''_{\text{SYNT}}, -)) \otimes \mathbb{Q} \}.$$

Comme  $\mathcal{C}''(j_!''(\beta)_n^m) =: \tilde{\beta}$  est un isomorphisme, et de même en remplaçant  $\beta$  par  $\alpha$ , ou  $\alpha_G$ ,  $\beta_G$ , le triangle distingué  $\mathcal{C}''(S_2)$  obtenu en appliquant  $\mathcal{C}''$  à  $(S_2)$  est aussi  $G$ -équivariant par transport de structure par ces isomorphismes : compte tenu de [E-LS 2, (3.11)] ce morphisme de triangles s'identifie à

$$\begin{array}{ccccc} (3.3.13.1) & R\Gamma_{\text{ét},c}(U'', f^*(\mathcal{F}_U)) \otimes \mathbb{Q} & \longrightarrow & R\Gamma_{\text{rig},c}(U'', f_{\text{rig}}^*(E_{K|U}^\dagger)) \xrightarrow{1-\phi} & R\Gamma_{\text{rig},c}(U'', f_{\text{rig}}^*(E_{K|U}^\dagger)) \\ & \downarrow \simeq R\Gamma_{\text{ét},c}(\beta_G) \otimes \mathbb{Q} & & \downarrow \simeq R\Gamma_{\text{rig},c}(\beta_K^\dagger) & \downarrow \simeq R\Gamma_{\text{rig},c}(\beta_K^\dagger) \\ (3.3.13.2) & R\Gamma_{\text{ét},c}(U'', \mathcal{G}) \otimes \mathbb{Q} & \longrightarrow & R\Gamma_{\text{rig},c}(U'', \mathcal{M}_K^\dagger) \xrightarrow{1-\phi} & R\Gamma_{\text{rig},c}(U'', \mathcal{M}_K^\dagger). \end{array}$$

En prenant les points fixes sous  $G$  dans l'isomorphisme

$$R\Gamma_{\text{rig},c}(U'', f_{\text{rig}}^*(E_{K|U}^\dagger)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}''(j_!'' f_{\text{CRIS}}^*(E_{|U})_n^{m-\text{cris}})$$

et en prouvant à la manière du théorème (3.2) que les points fixes sous  $G$  du membre de droite s'identifient à

$$\mathcal{C}(j_{U!} E_{|U_n}^{m-\text{cris}}) := R \varprojlim_m \{ (R \varprojlim_n R\Gamma(\overline{X}_{\text{SYNT}}, j_{U!} E_{|U_n}^{m-\text{cris}})) \otimes \mathbb{Q} \}$$

on a prouvé le (1) du théorème (3.3.13) pour  $U$  grâce à [IV, théo (4.2)].

On a donc deux triangles distingués reliés par des flèches qui sont des isomorphismes

$$\begin{array}{ccccc} R\Gamma_{\text{rig},c}(U, E_{K|U}^\dagger) & \longrightarrow & R\Gamma_{\text{rig},c}(X, E_K^\dagger) & \longrightarrow & R\Gamma_{\text{rig},c}(Z, E_{K|Z}^\dagger) \\ \downarrow \simeq & & & & \downarrow \simeq \\ \mathcal{C}(j_{U!} E_{|U_n}^{m-\text{cris}}) & \longrightarrow & \mathcal{C}(j_! E_n^{m-\text{cris}}) & \longrightarrow & \mathcal{C}(j_{Z!} E_{|Z_n}^{m-\text{cris}}) ; \end{array}$$

d'après les axiomes des catégories triangulées [H 1, I, §1] on peut compléter par un isomorphisme au milieu.

Ceci achève la preuve du (1) du théorème.

*Prouvons à présent le (2).* Comme  $k$  est algébriquement clos les points fixes sous  $G$  de  $R\Gamma_{\text{ét},c}(U'', f^*(\mathcal{F}_U)) \otimes \mathbb{Q}$  sont égaux à  $R\Gamma_{\text{ét},c}(U, \mathcal{F}_U) \otimes \mathbb{Q}$ . Par suite

les points fixes sous  $G$  du triangle distingué (3.3.13.1)  $G$ -équivariant fournissent une suite exacte longue de cohomologie

$$(3.3.13.3) \rightarrow H_{\text{ét},c}^i(U, \mathcal{F}_U) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow H_{\text{rig},c}^i(U/K, E_{K|U}^\dagger) \xrightarrow{1-\phi} H_{\text{rig},c}^i(U/K, E_{K|U}^\dagger) \rightarrow .$$

Les groupes de cohomologie rigide  $H_{\text{rig},c}^i(U/K, E_{K|U}^\dagger)$  étant de dimension finie sur  $K$  [Tsu 1, theo 6.1.2], et  $k$  algébriquement clos, ces suites exactes se scindent en suites exactes courtes [Il 1; II, lemme 5.6]. Notons  $Z \hookrightarrow X$  l'immersion du fermé complémentaire à  $U$  (rappelons que  $X$  est supposé réduit). Si  $\dim Z = 0$ ,  $Z$  est fini étale sur  $k$  et on a une suite analogue à (3.3.13.3) pour  $Z$  : par récurrence sur la dimension de  $X$  on peut donc supposer l'existence de suites exactes courtes telles que (3.3.13.3) pour  $U$  et pour  $Z$ . En particulier on a trois triangles distingués horizontaux reliés par des flèches induites par (3.3.13.3) appliqué à  $U$  et  $Z$  :

$$(3.3.13.4) \quad \begin{array}{ccccc} R\Gamma_{\text{ét},c}(U, \mathcal{F}_U) & \longrightarrow & R\Gamma_{\text{ét},c}(X, \mathcal{F}_X) & \longrightarrow & R\Gamma_{\text{ét},c}(Z, \mathcal{F}_Z) \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ R\Gamma_{\text{rig},c}(U, E_{K|U}^\dagger) & \longrightarrow & R\Gamma_{\text{rig},c}(X, E_K^\dagger) & \longrightarrow & R\Gamma_{\text{rig},c}(Z, E_{K|Z}^\dagger) \\ \downarrow 1-\phi_U & & \downarrow 1-\phi & & \downarrow 1-\phi_Z \\ R\Gamma_{\text{rig},c}(U, E_{K|U}^\dagger) & \longrightarrow & R\Gamma_{\text{rig},c}(X, E_K^\dagger) & \longrightarrow & R\Gamma_{\text{rig},c}(Z, E_{K|Z}^\dagger); \end{array}$$

par les axiomes des catégories triangulées [H 1, I, § 1] on peut compléter par un morphisme  $R\Gamma_{\text{ét},c}(X, \mathcal{F}_X) \rightarrow R\Gamma_{\text{rig},c}(X, E_K^\dagger)$ . Les suites exactes courtes (3.3.13.3) pour  $U$  et  $Z$  fournissent alors l'analogie pour  $X$ , d'où le (2) du théorème (3.3.13).

*Autre démonstration du (2).* Une autre méthode consiste à appliquer le foncteur  $\mathcal{C}$  à la suite exacte du théorème (3.3.12)

$$(3.3.13.5) \quad 0 \rightarrow j_! \mathcal{F}_n \rightarrow j_! (\mathcal{F}_n \otimes_{\mathcal{V}_n^\sigma} \mathcal{O}_{n,X}^{m-\text{cris}}) \xrightarrow{1-\phi} j_! (\mathcal{F}_n \otimes_{\mathcal{V}_n^\sigma} \mathcal{O}_{n,X}^{m-\text{cris}}) \rightarrow 0$$

où l'on remarque que  $E_n^{m-\text{cris}} = \mathcal{F}_n \otimes_{\mathcal{V}_n^\sigma} \mathcal{O}_{n,X}^{m-\text{cris}}$ . Par le (1) du théorème le triangle distingué ainsi obtenu s'identifie au triangle distingué

$$R\Gamma_{\text{ét},c}(X, \mathcal{F}_X) \longrightarrow R\Gamma_{\text{rig},c}(X, E_K^\dagger) \xrightarrow{1-\phi} R\Gamma_{\text{rig},c}(X, E_K^\dagger).$$

La suite exacte longue de cohomologie se scinde alors en suites exactes courtes par le même argument que ci-dessus.  $\square$

**Remarque (3.3.14).** En supposant seulement que  $k$  contient  $\mathbb{F}_q$  [cf (3.0)] et que  $\mathcal{F}_n$  est un  $\mathcal{V}_n^\sigma$ -module localement trivial sur  $\mathrm{SYNT}(X)$ , on pose encore

$$E_n^{m-\mathrm{cris}} = T^{(m)}(\mathcal{F}_n)^{\mathrm{cris}} = \mathcal{F}_n \otimes_{\mathcal{V}_n^\sigma} \mathcal{O}_{n,X}^{m-\mathrm{cris}}.$$

En appliquant le foncteur  $R\Gamma(\overline{X}_{\mathrm{SYNT},-})$  à la suite exacte (3.3.13.5), on obtient un triangle distingué

$$R\Gamma_{\mathrm{ét},c}(X, \mathcal{F}_n) \longrightarrow R\Gamma_{\mathrm{synt},c}(X, E_n^{m-\mathrm{cris}}) \xrightarrow{1-\phi} R\Gamma_{\mathrm{synt},c}(X, E_n^{m-\mathrm{cris}}).$$

# VI. Fonctions $L$

Nous allons définir dans ce VI les fonctions  $L$  attachées à des variétés sur des corps finis, et à coefficients dans des  $F$ -modules ou des  $F$ -(iso)cristaux : nous utiliserons deux méthodes, l'une par les relèvements de Teichmüller, l'autre par voie cohomologique, et nous montrerons comment elles se rejoignent.

Sauf mention du contraire, on suppose dans ce VI que  $k$  est un corps fini,  $k = \mathbb{F}_q$ ,  $q = p^a$ ,  $\mathcal{V}$  est un anneau de valuation discrète complet, d'idéal maximal  $\mathfrak{m}$  et corps résiduel  $k = \mathbb{F}_q$ . On suppose le corps des fractions  $K$  de  $\mathcal{V}$  de caractéristique 0, on fixe une uniformisante  $\pi$  et on note  $e$  l'indice de ramification.

On relève la puissance  $q$  sur  $k$  en un automorphisme  $\sigma$  de  $\mathcal{V}$ , tel que  $\sigma(\pi) = \pi$ , suivant la méthode [Et 5, I 1.1], cf [II, 0] : on note encore  $\sigma$  son extension à  $K$ .

## 1. Fonctions $L$ des $F$ -modules convergents ou surconvergents

### 1.1. Relèvement de Teichmüller

On reprend les notations de [III, 3.1] en supposant cette fois que  $k$  est un corps fini,  $k = \mathbb{F}_q$ ,  $q = p^a$ .

### 1.2. $F$ -modules convergents

Avec les notations du 1.1 on désigne par  $\mathbf{F}^a\text{-Mod}(\hat{\mathbf{A}})$  (resp.  $\mathbf{F}^a\text{-Mod}(\hat{\mathbf{A}}_K)$ ) la catégorie des  $\hat{\mathbf{A}}$  (resp.  $\hat{\mathbf{A}}_K$ )-modules projectifs de type fini  $\mathcal{M}$  munis d'un morphisme de Frobenius (non nécessairement un isomorphisme)



$$\phi_{\mathcal{M}} : \mathcal{M}^{\sigma} := F_{\mathcal{A}}^*(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{M}$$

avec  $\mathcal{A} = \hat{A}$  (resp.  $\hat{A}_K$ ). Un tel  $\mathcal{M}$  est appelé  **$F$ -module convergent**.

Soit  $\mathcal{M} \in F^a\text{-Mod}(\hat{A}_K)$ . La fibre  $\mathcal{M}_x$  de  $\mathcal{M}$  en  $x \in |X|$  est par définition

$$(1.2.1) \quad \mathcal{M}_x := \hat{\tau}_K(x)^*(\mathcal{M}) ,$$

et  $\phi_{\mathcal{M}}$  induit

$$(1.2.2) \quad \phi_x = \phi_{\mathcal{M}} \otimes_{\hat{A}_K} K(x) : \sigma_{K(x)}^*(\mathcal{M}_x) \rightarrow \mathcal{M}_x ,$$

d'après la commutativité du diagramme (1.1.1).

L'itéré  $\deg x$  fois de  $\phi_x$  est un endomorphisme  $K(x)$ -linéaire du  $K(x)$ -espace vectoriel de dimension finie  $\mathcal{M}_x$

$$\phi_x^{\deg x} : \mathcal{M}_x \rightarrow \mathcal{M}_x .$$

Notons

$$(1.2.3) \quad \det(\mathcal{M}_x, T) = \det(1 - T \phi_x^{\deg x}, \mathcal{M}_x)$$

le "polynôme caractéristique" de  $\phi_x^{\deg x}$ .

Pour  $\mathcal{M}' \in F^a\text{-Mod}(\hat{A})$  on définit de même

$$(1.2.4) \quad \det(\mathcal{M}'_x, T) = \det(1 - T \phi_x^{\deg x}, \mathcal{M}'_x).$$

**Lemme (1.2.5).** *Avec les notations précédentes, on a :*

- (i) *Si  $\mathcal{M} \in F^a\text{-Mod}(\hat{A}_K)$  , alors  $\det(\mathcal{M}_x, T) \in K[T]$  .*
- (ii) *Si  $\mathcal{M}' \in F^a\text{-Mod}(\hat{A})$ , alors  $\det(\mathcal{M}'_x, T) \in \mathcal{V}[T]$ .*

*Démonstration.* Pour (i), soient  $(e_i)_{i=1,\dots,r}$  (resp.  $(e_i \otimes 1)_{i=1,\dots,r}$ ) une base locale de  $\mathcal{M}$  (resp. de  $\mathcal{M}^{\sigma}$ ), et  $C(\underline{X})$  la matrice de  $\phi_{\mathcal{M}}$  dans ces bases respectives. Alors

$$C(\underline{X}) = \sum_{\underline{u} \in \mathbb{N}^n} a_{\underline{u}} \underline{X}^{\underline{u}},$$

avec  $a_{\underline{u}} \in \pi^{\alpha} M_r(\mathcal{V})$  pour un  $\alpha \in \mathbb{Z}$  et

$$\det(\mathcal{M}_x, T) = \det\{1 - T C(\underline{t}(x)^{q^{\deg x-1}}) \times \dots \times C(\underline{t}(x)^q) \times C(\underline{t}(x))\}$$

où  $\underline{t}(x)^\beta = t_1(x)^\beta \times \dots \times t_n(x)^\beta$  et les  $t_j(x)$  sont les coordonnées de  $\hat{\tau}_K(x)$ . Il est clair que  $\det(\mathcal{M}_x, T)$  a des coefficients invariants par l'action du Frobenius  $\sigma_{K(x)}$ , car  $\sigma_{K(x)}$  envoie  $\underline{t}(x)$  sur  $\underline{t}(x)^q$ ; d'où le (i).

Le cas (ii) est analogue.  $\square$

Si l'on note  $\tilde{\mathcal{M}}_x$  l'espace vectoriel  $\mathcal{M}_x$  vu comme  $K$ -espace vectoriel et  $\tilde{\phi}_x$  son endomorphisme de Frobenius on a

$$\det(\mathcal{M}_x, T) = \det(1 - T \phi_x^{\deg x}) = \det_K(1 - T \tilde{\phi}_x^{\deg x})^{-1/\deg x}.$$

**Définition (1.2.6).** La fonction  $L$  de  $(\mathcal{M}, \phi_{\mathcal{M}}) \in F^a\text{-Mod}(\hat{A}_K)$  est définie par

$$\begin{aligned} L(\text{Spec } A_0, \mathcal{M}, t) &= \prod_{x \in |\text{Spec } A_0|} \det(1 - t^{\deg x} \phi_x^{\deg x} | \mathcal{M}_x)^{-1} \in K[[t]] \\ &= \prod_{x \in |\text{Spec } A_0|} \det(1 - t^{\deg x} \tilde{\phi}_x^{\deg x} | \tilde{\mathcal{M}}_x)^{-1/\deg x}. \end{aligned}$$

Si  $(\mathcal{M}', \phi_{\mathcal{M}'}) \in F^a\text{-Mod}(\hat{A})$  on définit de même  $L(\text{Spec } A_0, \mathcal{M}', t)$  et alors

$$L(\text{Spec } A_0, \mathcal{M}', t) = L(\text{Spec } A_0, \mathcal{M}'_K, t) \in \mathcal{V}[[t]],$$

où l'on a posé

$$(\mathcal{M}'_K, \phi_{\mathcal{M}'_K}) := (\mathcal{M}', \phi_{\mathcal{M}'}) \otimes_{\hat{A}} \hat{A}_K.$$

**Lemme (1.2.7).** Pour établir la méromorphie  $p$ -adique de  $L(\text{Spec } A_0, \mathcal{M}, t)$  pour  $(\mathcal{M}, \phi_{\mathcal{M}}) \in F^a\text{-Mod}(\hat{A}_K)$  on peut supposer qu'il existe  $(\mathcal{M}', \phi_{\mathcal{M}'}) \in F^a\text{-Mod}(\hat{A})$  tel que  $\mathcal{M}'$  est libre et  $(\mathcal{M}, \phi_{\mathcal{M}}) = (\mathcal{M}', \pi^\alpha \phi_{\mathcal{M}'}) \otimes_{\hat{A}} \hat{A}_K$  pour un  $\alpha \in \mathbb{Z}$ . On a alors

$$L(\text{Spec } A_0, \mathcal{M}, t) = L(\text{Spec } A_0, \mathcal{M}', \pi^\alpha t).$$

*Démonstration.* Puisque  $\mathcal{M}$  est projectif de type fini sur  $\hat{A}_K$ , et qu'un ouvert de  $\text{Spec } \hat{A}_K$  est intersection d'un ouvert de  $\text{Spec } \hat{A}$  avec  $\text{Spec } \hat{A}_K$ , il existe un recouvrement fini de  $\text{Spec } \hat{A}_K$  par des ouverts  $U_K = \text{Spec } B_K$ , où  $B = \hat{A}[1/g]$ ,  $g \in \hat{A}$ , tels que

$$\mathcal{M} \otimes_{\hat{A}_K} B_K \simeq \bigoplus_{i=1}^r B_K e_i.$$

Relevons  $g \bmod \pi =: g_0$  en  $f \in A$ ; comme on a un isomorphisme  $\hat{B} \simeq \widehat{A[1/f]}$  [Et 4, cor 1 du théo 4] on en déduit que

$$\mathcal{N} := \mathcal{M} \otimes_{\hat{A}_K} \hat{B}_K \simeq \bigoplus_{i=1}^r \widehat{A[1/f]}_K e_i$$

et que la matrice  $C(\underline{X})$  du Frobenius  $\phi_{\mathcal{N}}$  est à coefficients dans  $\pi^\alpha \widehat{A[1/f]}$ , avec  $\alpha \in \mathbb{Z}$ .

La fonction  $L(\mathcal{M}, t)$  est définie par un produit eulérien sur les points fermés de  $\text{Spec } A_0$  et ceux-ci sont en bijection avec les points fermés de  $\text{Spf } \hat{A}$ : un recouvrement ouvert fini de  $\text{Spf } \hat{A}$  est fourni par des  $\text{Spf } \widehat{A[1/f]}$ ,  $f \in A$  comme ci-dessus; on peut donc prendre

$$\mathcal{M}' = \bigoplus_{i=1}^r \widehat{A[1/f]} e_i$$

avec pour matrice du Frobenius  $\phi_{\mathcal{M}'}$  la matrice  $\pi^{-\alpha} C(\underline{X})$ , à coefficients dans  $\widehat{A[1/f]}$ :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}'^\sigma & \xrightarrow{\phi_{\mathcal{M}'}} & \mathcal{M}' \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{N}^\sigma = \mathcal{M}'_K{}^\sigma & \xrightarrow{\pi^{-\alpha} \phi_{\mathcal{N}}} & \mathcal{N} = \mathcal{M}'_K. \end{array}$$

Le couple  $(\mathcal{M}', \phi_{\mathcal{M}'})$  est ce que Wan appelle une  $\sigma$ -module convergent [W 2], [W 3].  $\square$

### 1.3. $F$ -modules surconvergents

Avec les notations de 1.1 et par analogie avec 1.2 on désigne par  $\mathbf{F}^a\text{-Mod}(\mathbf{A}^\dagger)$  (resp.  $\mathbf{F}^a\text{-Mod}(\mathbf{A}_K^\dagger)$ ) la catégorie des **F-modules surconvergents**, i.e. la catégorie des  $A^\dagger$  (resp.  $A_K^\dagger$ )-modules projectifs de type fini  $M$  muni d'un morphisme de Frobenius (non nécessairement un isomorphisme)

$$\phi_M : M^\sigma = F_{\mathcal{A}}^*(M) \rightarrow M$$

avec  $\mathcal{A} = A^\dagger$  (resp.  $A_K^\dagger$ ).

Soit  $M \in F^a\text{-Mod}(A_K^\dagger)$ . La fibre  $M_x$  de  $M$  en  $x \in |X|$  est par définition

$$(1.3.1) \quad M_x := \tau_K^\dagger(x)^*(M),$$

et  $\phi_M$  induit

$$(1.3.2) \quad \phi_x = \phi_M \otimes_{A_K^\dagger} K(x) : \sigma_{K(x)}^*(M_x) \rightarrow M_x ,$$

d'après la commutativité du diagramme (1.1.1).

L'itéré  $\deg x$  fois de  $\phi_x$  est un endomorphisme  $K(x)$ -linéaire du  $K(x)$ -espace vectoriel de dimension finie  $M_x$

$$\phi_x^{\deg x} : M_x \rightarrow M_x ;$$

on notera  $\tilde{M}_x$  l'espace vectoriel  $M_x$  vu comme  $K$ -espace vectoriel et  $\tilde{\phi}_x$  son morphisme de Frobenius.

Notons

$$(1.3.3) \quad \det(M_x, T) = \det(1 - T \phi_x^{\deg x}, M_x) ;$$

pour  $M' \in F^a\text{-Mod}(A^\dagger)$  on pose de même

$$(1.3.4) \quad \det(M'_x, T) = \det(1 - T \phi_x^{\deg x}, M'_x).$$

On démontre le lemme suivant comme (1.2.5).

**Lemme (1.3.5).** *Avec les notations précédentes, on a :*

- (i) *Si  $M \in F^a\text{-Mod}(A_K^\dagger)$ , alors  $\det(M_x, T) \in K[T]$  .*
- (ii) *Si  $M' \in F^a\text{-Mod}(A^\dagger)$ , alors  $\det(M'_x, T) \in \mathcal{V}[T]$  .*

De même on a :

**Définition et proposition (1.3.6).** Soit  $(M, \phi_M) \in F^a\text{-Mod}(A_K^\dagger)$  et  $(\mathcal{M}, \phi_{\mathcal{M}}) \in F^a\text{-Mod}(\hat{A}_K)$  son image canonique par l'extension des scalaires de  $A_K^\dagger$  à  $\hat{A}_K$ . La fonction  $L$  de  $(M, \phi_M)$  est définie par

$$\begin{aligned} L(\text{Spec } A_0, M, T) &= \prod_{x \in |\text{Spec } A_0|} \det(1 - t^{\deg x} \phi_x^{\deg x}, M_x)^{-1} \in K[[t]] \\ &= \prod_{x \in |\text{Spec } A_0|} \det(1 - t^{\deg x} \tilde{\phi}_x^{\deg x}, \tilde{M}_x)^{-1/\deg x}, \end{aligned}$$

et on a

$$L(\text{Spec } A_0, M, t) = L(\text{Spec } A_0, \mathcal{M}, t).$$

Si  $(M', \phi_{M'}) \in F^a\text{-Mod}(A^\dagger)$  on définit de même  $L(\text{Spec } A_0, M', t)$  et alors

$$L(\text{Spec } A_0, M', t) = L(\text{Spec } A_0, M'_K, t) \in \mathcal{V}[[t]],$$

où l'on a posé

$$(M'_K, \phi_{M'_K}) := (M', \phi_{M'}) \otimes_{A^\dagger} A_K^\dagger.$$

Comme (1.2.7) on montre :

**Lemme (1.3.7).** Pour établir la méromorphie  $p$ -adique de  $L(\text{Spec } A_0, M, t)$  pour  $(M, \phi_M) \in F^a\text{-Mod}(A_K^\dagger)$  on peut supposer qu'il existe  $(M', \phi_{M'}) \in F^a\text{-Mod}(A^\dagger)$  tel que  $M'$  est libre et  $(M, \phi_M) = (M', \pi^\alpha \phi_{M'}) \otimes_{A^\dagger} A_K^\dagger$  pour un  $\alpha \in \mathbb{Z}$ . On a alors

$$L(\text{Spec } A_0, M, t) = L(\text{Spec } A_0, M', \pi^\alpha t).$$

**Théorème (1.3.8).** Soient  $X = \text{Spec } A_0$  un  $k$ -schéma lisse,  $A$  une  $\mathcal{V}$ -algèbre lisse relevant  $A_0$  et  $(M, \phi_M) \in F^a\text{-Mod}(A_K^\dagger)$ . Alors  $L(X, M, t)$  est  $p$ -adiquement méromorphe.

*Démonstration.* Par le lemme (1.3.7), on peut remplacer  $M$  par un  $A^\dagger$ -module libre  $M'$  :  $(M', \phi_{M'})$  est alors ce que Wan appelle un  $\sigma$ -module surconvergent [W 2] [W 3]. L'extension au cas affine et lisse de la formule des traces de Monsky-Washnitzer établie par Wan [W 3, appendix] prouve alors la méromorphie de  $L(M', t)$ , donc celle de  $L(M, t)$  : on peut aussi se ramener classiquement au cas de l'espace affine [W 3, § 9] et utiliser la formule des

traces de Monsky [Dw 2, 7(a)].  $\square$

### 1.4. La conjecture de Dwork pour les $F$ -modules sur-convergenents

Avec les notations de 1.1, 1.2, 1.3 décomposons le "polynôme caractéristique" de  $(\mathcal{M}, \phi_{\mathcal{M}}) \in F^a\text{-Mod}(\hat{A}_K)$  au point  $x \in |X|$  en

$$\begin{aligned} \det(\mathcal{M}_x, t) &:= \det(1 - t \phi_x^{\deg x} | \mathcal{M}_x) \in K[t] \\ &= \prod_j \pi_j (1 - a_{j,x} t), \end{aligned}$$

où les  $a_{j,x}$  sont dans une clôture algébrique  $K^{\text{alg}}$  de  $K$  : plus exactement les  $a_{j,x}$  sont dans une extension finie (éventuellement ramifiée)  $K'(x) \subset K^{\text{alg}}$  de  $K(x)$  ; soient  $\pi'(x)$  une uniformisante de  $K'(x)$  et  $\sigma_{K'(x)}$  un relèvement à  $K'(x)$  de la puissance  $p^a$  de  $k(x)$  tel que  $\sigma_{K'(x)}(\pi'(x)) = \pi'(x)$  [Et 5, 1.1]. Notons  $\pi_x = \pi^{\deg x}$  et  $\text{ord}_{\pi_x}$  la valuation de  $K'(x)$  normalisée par  $\text{ord}_{\pi_x}(\pi_x) = 1$ .

Pour tout nombre rationnel  $\alpha \in \mathbb{Q}$  on définit la partie de pente  $\alpha$  du "polynôme caractéristique"  $\det(\mathcal{M}_x, t)$  par le produit

$$(1.4.1) \quad \det_{\alpha}(\mathcal{M}_x, t) := \prod_{\text{ord}_{\pi_x}(a_{j,x})=\alpha} (1 - a_{j,x} t) .$$

Si  $a_{j,x}$  est l'inverse d'une racine de  $\det(\mathcal{M}_x, t)$ , alors  $\sigma_{K'(x)}(a_{j,x})$  en est une aussi par le même argument que pour la démonstration du lemme (1.2.5), et puisque  $\sigma_{K'(x)} : K'(x) \rightarrow K'(x)$  est une extension isométrique on a  $\text{ord}_{\pi_x}(a_{j,x}) = \text{ord}_{\pi_x}(\sigma_{K'(x)}(a_{j,x}))$  ; par conséquent  $\det_{\alpha}(\mathcal{M}_x, t)$  est à coefficients dans  $K$ . Comme  $\mathcal{M}$  est un  $\hat{A}_K$ -module projectif de type fini, il existe  $\alpha_0 \in \mathbb{Q}$  tel que pour tout  $x \in |Spec A_0|$  et tout  $\alpha \in \mathbb{Q}$ ,  $\alpha < \alpha_0$ , on ait  $\det_{\alpha}(\mathcal{M}_x, t) = 1$ . D'autre part  $\det(\mathcal{M}_x, t)$  s'exprime par un produit fini

$$(1.4.2) \quad \det(1 - t \phi_x^{\deg x} | \mathcal{M}_x) = \prod_{\alpha \in \mathbb{Q}} \det_{\alpha}(\mathcal{M}_x, t) .$$

La partie de pente  $\alpha$  de la fonction  $L(X, \mathcal{M}, t)$  est définie par l'expression

$$(1.4.3) \quad L_{\alpha}(X, \mathcal{M}, t) := \prod_{x \in |X|} \det_{\alpha}(\mathcal{M}_x, t^{\deg x})^{-1} \in K[[t]] .$$

D'après (1.4.2) on a la relation

$$(1.4.4) \quad L(X, \mathcal{M}, t) = \prod_{\alpha \in \mathbb{Q}} L_{\alpha}(X, \mathcal{M}, t);$$

en fait le théorème de spécialisation de Grothendieck prouve que le produit (1.4.4) est fini [W 3, fin du § 2].

Pour  $r \in \mathbb{N}^*$  et  $\alpha \in \mathbb{Q}$ , on définit plus généralement

$$(1.4.5) \quad \det^{(r)}(\mathcal{M}_x, t) := \prod_j (1 - (a_{j,x})^r t),$$

$$(1.4.6) \quad \det_a^{(r)}(\mathcal{M}_x, t) := \prod_{\text{ord}_{\pi_x}(a_{j,x})=\alpha} (1 - (a_{j,x})^r t),$$

$$(1.4.7) \quad L^{(r)}(X, \mathcal{M}, t) := \prod_{x \in |X|} \det^{(r)}(\mathcal{M}_x, t^{\deg x})^{-1} \in K[[t]],$$

$$(1.4.8) \quad L_{\alpha}^{(r)}(X, \mathcal{M}, t) := \prod_{x \in |X|} \det_{\alpha}^{(r)}(\mathcal{M}_x, t^{\deg x})^{-1} \in K[[t]].$$

On a encore :

$$(1.4.9) \quad L^{(r)}(X, \mathcal{M}, t) = \prod_{\alpha \in \mathbb{Q}} L_{\alpha}^{(r)}(X, \mathcal{M}, t).$$

Plus précisément, grâce à l'expression établie par Wan [W 2, lemma 4.4], on a en fait

$$(1.4.10) \quad L^{(r)}(X, \mathcal{M}, t) = \prod_{i \geq 1} L(X, \text{Sym}^{r-i} \mathcal{M} \otimes \overset{i}{\wedge} \mathcal{M}, t)^{i \times (-1)^{i-1}},$$

$$(1.4.11) \quad L_{\alpha}^{(r)}(X, \mathcal{M}, t) = \prod_{i \geq 1} L_{\alpha}(X, \text{Sym}^{r-i} \mathcal{M} \otimes \overset{i}{\wedge} \mathcal{M}, t)^{i \times (-1)^{i-1}}.$$

Les définitions précédentes s'étendent à  $M \in F^a\text{-Mod}(A_K^{\dagger})$ .

Nous pouvons à présent énoncer la conjecture de Dwork généralisée pour les  $F^a$ -modules surconvergens.

(1.4.12) **Conjecture (Dwork)**. Soit  $M \in F^a\text{-Mod}(A_K^{\dagger})$ . Alors, pour tout nombre rationnel  $\alpha \in \mathbb{Q}$  et tout entier  $r \in \mathbb{N}^*$ , la fonction  $L_{\alpha}^{(r)}(X, M, t)$  est  $p$ -adiquement méromorphe.

Grâce aux travaux de Wan, on démontre ci-dessous (facilement) la conjecture :

**Théorème (1.4.13).** *Soient  $A$  une  $\mathcal{V}$ -algèbre lisse,  $X = \text{Spec}(A/\mathfrak{m}A)$  et  $M \in F^a\text{-Mod}(A_K^\dagger)$ . Alors, pour tout  $\alpha \in \mathbb{Q}$  et tout  $r \in \mathbb{N}^*$ , les fonctions  $L_\alpha^{(r)}(X, M, t)$ , et  $L^{(r)}(X, M, t)$  sont  $p$ -adiquement méromorphes.*

*Démonstration.* Par stabilité de la catégorie  $F^a\text{-Mod}(A_K^\dagger)$  par puissances symétriques et extérieures [W 2, § 3] la conjecture (1.4.12) se ramène au cas  $r = 1$ . Par la même démonstration que celle du lemme (1.3.7) on peut supposer qu'il existe un  $F^a$ -module libre surconvergent  $(M', \phi_{M'}) \in F^a\text{-Mod}(A^\dagger)$  tel que

$$(M, \phi_M) = (M', \pi^\beta \phi_{M'}) \otimes_{A^\dagger} A_K^\dagger \text{ pour un } \beta \in \mathbb{Z} ,$$

et 
$$L(M, t) = L(M', \pi^\beta t) .$$

On est ramené à montrer que  $L_\alpha(\text{Spec } A_0, M', t)$  est  $p$ -adiquement méromorphe, ce que Wan a établi [W 3, theo 1.1].  $\square$

## 2. Fonctions $L$ des $F$ -isocristaux convergents (resp. des $F$ -cristaux)

### 2.1. $F$ -isocristaux convergents

**2.1.1.** Soient  $S$  un  $k$ -schéma séparé de type fini,  $\mathcal{E} \in F^a\text{-Isoc}(S/K)$  et  $\phi_{\mathcal{E}} : F_\sigma^* \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}$  son isomorphisme de Frobenius [B 3, 2]. Comme la catégorie  $F^a\text{-Isoc}(S/K)$  ne dépend que du sous-schéma réduit sous-jacent à  $S$  et que la fonction  $L(S, \mathcal{E}, t)$ , définie ci-dessous, est un produit eulérien sur l'ensemble  $|S|$  des points fermés de  $S$ , on peut supposer  $S$  réduit pour définir  $L(S, \mathcal{E}, t)$ .

Décomposons alors  $S$  en strates affines et lisses,  $X = \text{Spec } A_0$ , sur  $k = \mathbb{F}_q$  ; pour  $A$  une  $\mathcal{V}$ -algèbre lisse relevant  $A_0$  on reprend les notations du § 1. Pour  $x \in |X|$  le diagramme commutatif



$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec} k(x) & \hookrightarrow & \mathrm{Spec} \mathcal{V}(x) \\ \downarrow i_x & & \downarrow \\ S & \longrightarrow & \mathrm{Spec} \mathcal{V} \end{array}$$

[resp.

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec} k(x) & \hookrightarrow & \mathrm{Spec} \mathcal{V}(x) \\ \downarrow i_x & & \parallel \\ S & \longrightarrow & \mathrm{Spec} \mathcal{V} \end{array} ]$$

fournit un foncteur image inverse analogue à [B 3, (2.3.6), (2.3.7)]

$$(2.1.1.1) \quad \begin{array}{ccc} i_x^* : F^a\text{-Isoc}(S/K) & \longrightarrow & F^a\text{-Isoc}(\mathrm{Spec}(k(x))/K(x)) \\ & & \parallel \\ & & F^a\text{-Isoc}^\dagger(\mathrm{Spec}(k(x))/K(x)) \end{array}$$

[resp.

$$(2.1.1.2) \quad \begin{array}{ccc} \tilde{i}_x^* : F^a\text{-Isoc}(S/K) & \longrightarrow & F^a\text{-Isoc}(\mathrm{Spec}(k(x))/K) \\ & & \parallel \\ & & F^a\text{-Isoc}^\dagger(\mathrm{Spec}(k(x))/K) \end{array} ] .$$

Alors

$$(2.1.1.3) \quad \begin{aligned} \mathcal{E}_x &:= H_{\mathrm{conv}}^0(\mathrm{Spec}(k(x))/K(x), i_x^*(\mathcal{E})) \text{ [cf O3]} \\ &\simeq H_{\mathrm{rig}}^0(\mathrm{Spec}(k(x))/K(x), i_x^*(\mathcal{E})) \end{aligned}$$

[resp.

$$(2.1.1.4) \quad \begin{aligned} \tilde{\mathcal{E}}_x &:= H_{\mathrm{conv}}^0(\mathrm{Spec}(k(x))/K, \tilde{i}_x^*(\mathcal{E})) \\ &\simeq H_{\mathrm{rig}}^0(\mathrm{Spec}(k(x))/K, \tilde{i}_x^*(\mathcal{E})) \end{aligned} ]$$

est un  $K(x)$ -espace vectoriel [resp.  $K$ -espace vectoriel] de dimension finie muni d'un isomorphisme de Frobenius

$$(2.1.1.5) \quad \phi'_x := H_{\text{rig}}^0(i_x^*(\phi))$$

$$(2.1.1.6) \quad [\text{resp.} \quad \tilde{\phi}'_x := H_{\text{rig}}^0(\tilde{i}_x^*(\phi)) ] .$$

**2.1.2.** Il y a une deuxième façon, explicitée ci-après en (2.1.2.3), de définir la fibre de  $\mathcal{E}$  en  $x \in |X|$  et son Frobenius, et ceci via les  $F$ -modules convergents : nous montrons que les deux façons coïncident.

Pour  $x \in |X| = |\text{Spec } A_0|$  le relèvement de Teichmüller de  $x$ , vu en 1.1,

$$\hat{\tau}(x) : \hat{A} \longrightarrow \mathcal{V}(x)$$

induit un morphisme

$$u : P_1 := \text{Spf}(\mathcal{V}(x)) \rightarrow P := \text{Spf}(\hat{A})$$

dont la réduction mod  $\pi$  est notée

$$v : X_1 := \text{Spec}(k(x)) \rightarrow Y := P_k$$

et  $v$  se factorise par

$$i_x : X_1 \hookrightarrow X = \text{Spec } A_0 .$$

On dispose ainsi d'un diagramme commutatif

$$(2.1.2.1) \quad \begin{array}{ccccccc} X_1 = \text{Spec}(k(x)) & \hookrightarrow & Y_1 = X_1 & \longrightarrow & P_1 & \stackrel{=}{=} & \text{Spf}(\mathcal{V}(x)) =: \mathcal{S}_1 \\ i_x \downarrow & & \downarrow v & & \downarrow u & & \\ X & \hookrightarrow & Y = P_k & \longrightarrow & P & \longrightarrow & \text{Spf } \mathcal{V} =: \mathcal{S} ; \end{array}$$

de la même manière que [B 3, (2.3.2) (iv)]  $u_K^*$  est donc une “réalisation” de  $i_x^*$ . De plus  $u_K$  induit un morphisme [B 3, (0.2.7)]

$$(2.1.2.2) \quad \tau_x : ]X_1[_{P_1} =: ]x[_{P_1} = \text{Spm}(K(x)) \hookrightarrow ]X[_P = \text{Spm}(\hat{A}_K)$$

commutant aux actions de Frobenius, et la restriction  $\tau_x^*$  de  $u_K^*$  est exacte (même argument que pour [B 3, (2.3.3) (iv)]) : évidemment  $\tau_x$  est aussi induit

par  $\hat{\tau}_K(x) : \hat{A}_K \rightarrow K(x)$ . Ainsi les flèches canoniques  
(2.1.2.3)

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(\cdot)X[_P, \mathcal{E}_{|X}) =: \mathcal{M} & \longrightarrow & \Gamma(\cdot)X[_P, R \tau_{x*} \tau_x^*(\mathcal{E})) \\ & & \downarrow \simeq \\ & & \Gamma(\cdot)x[_{P_1}, \tau_x^*(\mathcal{E})) \xrightarrow{\simeq} \hat{\tau}_K(x)^*(\mathcal{M}) = \mathcal{M}_x \\ & & \downarrow \simeq \\ & & H_{\text{rig}}^0(\text{Spec}(k(x))/K(x), i_x^*(\mathcal{E})) = \mathcal{E}_x \end{array}$$

sont compatibles aux Frobenius : par suite  $\phi'_x := H_{\text{rig}}^0(i_x^*(\phi))$  coïncide avec le morphisme

$$\phi_x : \sigma_{K(x)}^*(\mathcal{M}_x) \rightarrow \mathcal{M}_x \text{ du (1.2.2) ,}$$

$$(2.1.2.4) \quad \phi_x = \phi'_x ;$$

de même pour  $\tilde{\phi}_x$ .

L'itéré  $\deg x$  fois de  $\phi_x$  est un automorphisme  $K(x)$ -linéaire du  $K(x)$ -espace vectoriel de dimension finie  $\mathcal{E}_x$

$$\phi_x^{\deg x} : \mathcal{E}_x \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_x .$$

Le  $K$ -espace vectoriel  $\tilde{\mathcal{E}}_x$  défini en (2.1.1.4) n'est autre que  $\mathcal{E}_x$  vu comme  $K$ -espace vectoriel et  $\tilde{\phi}_x$  son morphisme de Frobenius.

Grâce au lemme (1.2.5) on obtient

**Lemme (2.1.2.5).** *Avec les notations de (2.1.1) et (2.1.2) on a, pour  $x \in |S|$ ,*

$$\det(1 - T \phi_x^{\deg x} | \mathcal{E}_x) = \det(1 - T \tilde{\phi}_x^{\deg x} | \mathcal{E}_x)^{1/\deg x} \in K[[T]] .$$

On déduit de (2.1.2.5) :

**Définition et proposition (2.1.3).** *Soient  $S$  un  $k$ -schéma séparé de type fini et  $(\mathcal{E}, \phi_{\mathcal{E}}) \in F^a\text{-Isoc}(S/K)$ . La fonction  $L$  de  $\mathcal{E}$  est définie par*

$$\begin{aligned} L(S, \mathcal{E}, t) &= \prod_{x \in |S|} \det(1 - t^{\deg x} \phi_x^{\deg x} | \mathcal{E}_x)^{-1} \in K[[t]] \\ &= \prod_{x \in |S|} \det(1 - t^{\deg x} \tilde{\phi}_x^{\deg x} | \tilde{\mathcal{E}}_x)^{-1/\deg x} . \end{aligned}$$

Dans le cas d'une famille de variétés on a le résultat suivant :

**Théorème (2.1.4).** *Supposons  $e \leq p - 1$ . Soient  $S$  un  $k$ -schéma séparé de type fini et  $f : X \rightarrow S$  un  $k$ -morphisme propre et lisse. Alors, pour tout entier  $i \geq 0$ , la fonction  $L(S, R^i f_{\text{conv}*}(\mathcal{O}_{X/K}), t)$  est rationnelle :*

$$L(S, R^i f_{\text{conv}*}(\mathcal{O}_{X/K}), t) \in K(t) .$$

*Démonstration.* On peut supposer  $S$  lisse sur  $k$ . D'après le [III, théorème (3.2.1)],  $R^i f_{\text{conv}*}(\mathcal{O}_{X/K}) \in F^a\text{-Isoc}(S/K)$  et sa formation commute au passage aux fibres [III, prop (3.3.4)] : pour  $s \in |S|$  on a  $(R^i f_{\text{conv}*}(\mathcal{O}_{X/K}))_s = H_{\text{cris}}^i(X_s/\mathcal{V}(s)) \otimes_{\mathcal{V}(s)} K(s)$ .

La suite de la démonstration est identique à celle du [théorème 3 (1)] de [Et 3] en remplaçant le théorème de comparaison de Katz-Messing [K-M] du cas projectif lisse par celui de Chiarellotto-Le Stum [C-LS 1, cor 1.3] pour le cas propre et lisse.  $\square$

## 2.2. $F$ -cristaux

Supposons, jusqu'à la fin de ce § 2, que l'indice de ramification  $e$  de  $\mathcal{V}$  vérifie  $e \leq p - 1$ , et notons  $F^a\text{-Cris}(S/\mathcal{V})$  la catégorie des  $F^a$ -cristaux localement libres de type fini [B 1] et [Et 2, II, § 2]. Soit  $E \in F^a\text{-Cris}(S/\mathcal{V})$  : rappelons la définition de la fonction  $L(S, E, t)$  [Et 2]. Pour  $x \in |S|$ , notons  $i_x : \text{Spec } k(x) \hookrightarrow S$  l'immersion canonique et  $E_x := i_x^*(E)(\text{Spec}(k(x)), \text{Spec}(\mathcal{V}(x)))$ . L'itéré  $\deg x$  fois de  $\phi : F_S^*(E) \rightarrow E$  induit un endomorphisme  $\mathcal{V}(x)$ -linéaire,  $F_x$ , du  $\mathcal{V}(x)$ -module libre de rang fini  $E_x$ , et, par le même argument qu'en (1.2), le "polynôme caractéristique"  $\det(1 - t F_x)$  est en fait à coefficients dans  $\mathcal{V}$ . Notons  $\tilde{E}_x$  le module  $E_x$  vu comme  $\mathcal{V}$ -module et  $\tilde{F}_x$  l'endomorphisme de  $\tilde{E}_x$  déduit de  $F_x$ . La fonction  $L$  de  $E$  est définie par [Et 2, II, § 2, p 50-51]

$$\begin{aligned} L(S, E, t) &:= \prod_{x \in |S|} \det(1 - t^{\deg x} \tilde{F}_x | \tilde{E}_x)^{-1/\deg x} \\ (2.2.1) \quad &= \prod_{x \in |S|} \det(1 - t^{\deg x} F_x | E_x)^{-1} \in \mathcal{V}[[t]] . \end{aligned}$$

Notons  $\mathcal{E} := E^{an}$  le  $F$ -isocrystal convergent associé à  $E$  [B 3, (2.4.2)]. Il est

clair d'après les définitions que l'on a l'égalité

$$(2.2.2) \quad L(S, E, t) = L(S, \mathcal{E}, t) .$$

### 3. Fonctions $L$ des $F$ -isocristaux Dwork -surconvergentes

#### 3.1. $F$ -isocristaux Dwork-surconvergentes

En 3.1 on suppose simplement que  $k$  est un corps de caractéristique  $p > 0$ .

Soit  $X$  un  $k$ -schéma séparé de type fini. On suppose qu'il existe une stratification de  $X$  par des  $k$ -schémas lisses  $X_i$ ,  $X = \coprod_i X_i$  : ceci est possible par exemple si  $k$  est parfait et  $X$  réduit [EGA IV, 17.15.13]. Fixons un recouvrement de  $X_i$  par des  $k$ -schémas affines et lisses  $X_{ij}$ ,  $X_i = \bigcup_j X_{ij}$ , et des  $\mathcal{V}$ -schémas formels lisses  $\mathcal{X}_{ij}$  relevant  $X_{ij}$ ,  $\mathcal{X}_{ij} = \text{Spf}(\hat{A}_{ij})$  où  $A_{ij}$  est une  $\mathcal{V}$ -algèbre lisse. Notons  $\mathcal{X}_{ij}^\dagger = \text{Spff}(A_{ij}^\dagger)$  le schéma faiblement formel associé à  $A_{ij}^\dagger$  [Mer],  $F_{A_{ij}^\dagger}$  un relèvement du Frobenius de  $X_{ij}$  comme en 1.1, et  $F_{\hat{A}_{ij}} = F_{A_{ij}^\dagger} \otimes_{A_{ij}^\dagger} \hat{A}_{ij}$ .

Considérons maintenant  $\mathcal{E} \in F^a\text{-Isoc}(X/K)$  et pour chaque  $(i, j)$  soit  $\mathcal{E}_{ij}$  un  $\hat{A}_{ij}$   $K$ -module projectif de type fini correspondant à la restriction de  $\mathcal{E}$  à  $X_{ij}$ , dont l'existence est assurée par le corollaire (1.2.3) du II : par cette équivalence la structure de Frobenius de  $\mathcal{E}$  fournit pour tout  $(i, j)$  un isomorphisme

$$\hat{\phi}_{ij} : F_{\hat{A}_{ij}}^*(\mathcal{E}_{ij}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_{ij}$$

compatible aux connexions.

Puisque  $(A_{ij}^\dagger, A_{ij}^\dagger/(\pi))$  est un couple hensélien [Et 4, théo 3] il existe d'après Elkik [El, cor 1 du théo 3, p 573] un  $A_{ij}^\dagger$   $K$ -module projectif de type fini  $E_{ij}$  tel que

$$\mathcal{E}_{ij} \simeq E_{ij} \otimes_{A_{ij}^\dagger K} \hat{A}_{ij} K .$$

**Définition (3.1.1).** Avec les notations ci-dessus, on dira que  $\mathcal{E}$  est **Dwork-surconvergent** pour la stratification précédente si  $\hat{\phi}_{ij}$  provient, par l'extension des scalaires  $A_{ij}^\dagger K \hookrightarrow \hat{A}_{ij} K$ , d'un isomorphisme

$$\phi_{ij}^\dagger : F_{A_{ij}^\dagger}^*(E_{ij}) \xrightarrow{\sim} E_{ij} .$$

Les morphismes entre de tels  $\mathcal{E}$  se définissent de la manière naturelle.

On notera

$$\mathbf{Dw}^\dagger(\mathbf{X}, (\mathbf{X}_{ij}), (\mathcal{X}_{ij}^\dagger), (\mathbf{F}_{\mathcal{X}_{ij}^\dagger}))$$

la catégorie ainsi obtenue et

$$\mathcal{D} : \mathbf{Dw}^\dagger(\mathbf{X}, (\mathbf{X}_{ij}), (\mathcal{X}_{ij}^\dagger), (\mathbf{F}_{\mathcal{X}_{ij}^\dagger})) \longrightarrow \mathbf{F}^a\text{-Isoc}(\mathbf{X}/\mathbf{K})$$

(3.1.2)

$$\mathcal{E}^\dagger := (\mathcal{E}, \mathbf{E}_{ij}, \phi_{ij}^\dagger) \longmapsto \mathcal{E}$$

le foncteur naturel “oubli des stratifications”.

**Remarque (3.1.3).** La notion “Dwork-surconvergent” dépend de la stratification : un  $F$ -isocrystal convergent  $\mathcal{E}$  peut très bien être Dwork-surconvergent pour une stratification et pas pour une autre. On retrouve le même problème que Wan avec les  $\sigma$ -modules surconvergents : [cf W 2, p 885].

Les propriétés suivantes sont claires :

**Proposition (3.1.4).** Le foncteur  $\mathcal{D}$  (3.1.2) est fidèle.

**Proposition (3.1.5).** La catégorie  $\mathbf{Dw}^\dagger(\mathbf{X}, (\mathbf{X}_{ij}), (\mathcal{X}_{ij}^\dagger), (\mathbf{F}_{\mathcal{X}_{ij}^\dagger}))$  est stable par puissances tensorielles, puissances symétriques, puissances extérieures et passage au dual.

### 3.2. Fonction $L$ des $F$ -isocristaux Dwork-surconvergen

**Définition (3.2.1).** Avec les notations de (3.1), et  $k$  fini, on définit la fonction  $L$  de  $\mathcal{E}^\dagger \in Dw^\dagger(X, (X_{ij}), (\mathcal{X}_{ij}^\dagger), (F_{\mathcal{X}_{ij}^\dagger}))$  par

$$L(X, \mathcal{E}^\dagger, t) = L(X, \mathcal{E}, t)$$

où  $\mathcal{E}$  est l'image de  $\mathcal{E}^\dagger$  par le foncteur d'oubli  $\mathcal{D}$  (3.1.2).

Pour un  $k$ -schéma séparé de type fini  $X$  et  $\mathcal{E} \in F^a\text{-Isoc}(X/K)$  on a vu en 2.1 que la définition de la fonction  $L$  de  $\mathcal{E}$  via la cohomologie rigide coïncide avec la définition via les  $F$ -modules convergents : ainsi pour  $\alpha \in \mathbb{Q}$  et  $r \in \mathbb{N}^*$  on définit, comme en (1.4.8),

$$(3.2.2) \quad L_\alpha^{(r)}(X, \mathcal{E}, t) := \prod_{x \in |X|} \det_\alpha^{(r)}(\mathcal{E}_x, t^{\deg x})^{-1} \in K[[t]].$$

On a encore :

$$(3.2.3) \quad L^{(r)}(X, \mathcal{E}, t) := \prod_{\alpha \in \mathbb{Q}} L_\alpha^{(r)}(X, \mathcal{E}, t) ;$$

plus précisément, on a

$$(3.2.4) \quad L^{(r)}(X, \mathcal{E}, t) = \prod_{i \geq 1} L(X, \text{Sym}^{r-i} \mathcal{E} \otimes \bigwedge^i \mathcal{E}, t)^{i \times (-1)^{i-1}} ,$$

$$(3.2.5) \quad L_\alpha^{(r)}(X, \mathcal{E}, t) = \prod_{i \geq 1} L_\alpha(X, \text{Sym}^{r-i} \mathcal{E} \otimes \bigwedge^i \mathcal{E}, t)^{i \times (-1)^{i-1}} .$$

Ces définitions s'étendent au cas des  $F$ -isocristaux Dwork-surconvergen  $\mathcal{E}^\dagger$  en posant, pour  $\mathcal{E} = \mathcal{D}(\mathcal{E}^\dagger)$  :

$$(3.2.6) \quad L_\alpha^{(r)}(X, \mathcal{E}^\dagger, t) := L_\alpha^{(r)}(X, \mathcal{E}, t) ,$$

$$(3.2.7) \quad L^{(r)}(X, \mathcal{E}^\dagger, t) = L^{(r)}(X, \mathcal{E}, t) .$$

Si  $E$  est un  $F$ -cristal,  $E \in F^a\text{-Cris}(X/\mathcal{V})$ , avec  $e \leq p-1$  et  $\mathcal{E} := E^{an}$  est le  $F$ -isocristal convergent associé on pose également

$$(3.2.8) \quad L_\alpha^{(r)}(X, E, t) := L_\alpha^{(r)}(X, \mathcal{E}, t)$$

$$(3.2.9) \quad L^{(r)}(X, E, t) = L^{(r)}(X, \mathcal{E}, t) .$$

La conjecture de Dwork est vraie pour les  $F$ -cristaux Dwork-surconvergentes, à savoir que l'on a le théorème suivant, par application directe du théorème (1.4.13) :

**Théorème (3.2.10).** *Soient  $X$  un  $k$ -schéma séparé de type fini muni d'une stratification comme en (3.1) et  $\mathcal{E}^\dagger \in Dw^\dagger(X, (X_{ij}), (\mathcal{X}_{ij}^\dagger), (F_{\mathcal{X}_{ij}^\dagger}))$ . Alors, pour tout nombre rationnel  $\alpha \in \mathbb{Q}$  et tout entier  $r \in \mathbb{N}^*$ , les fonctions  $L_\alpha^{(r)}(X, \mathcal{E}^\dagger, t)$  et  $L^{(r)}(X, \mathcal{E}^\dagger, t)$  sont  $p$ -adiquement méromorphes.*

## 4. Fonctions $L$ des $F$ -isocristaux surconvergents

### 4.1. Définitions

Soient  $S$  un  $k$ -schéma séparé de type fini,  $E \in F^a\text{-Isoc}^\dagger(S/K)$  et  $\phi_E : F_\sigma^* E \xrightarrow{\sim} E$  son isomorphisme de Frobenius [B 3, (2)]. Avec les notations de (2.1) et  $x \in |\text{Spec } A_0| \subset |S|$  on a aussi des foncteurs images inverses

$$(4.1.1) \quad i_x^* : F^a\text{-Isoc}^\dagger(S/K) \rightarrow F^a\text{-Isoc}^\dagger(\text{Spec}(k(x))/K(x))$$

$$\begin{aligned} & [\text{resp.} \\ (4.1.2) \quad & \tilde{i}_x^* : F^a\text{-Isoc}^\dagger(S/K) \rightarrow F^a\text{-Isoc}^\dagger(\text{Spec}(k(x))/K)] , \end{aligned}$$

et

$$(4.1.3) \quad E_x := H_{\text{rig}}^0(\text{Spec}(k(x))/K(x), i_x^*(E))$$

$$\begin{aligned} & [\text{resp.} \\ (4.1.4) \quad & \tilde{E}_x := H_{\text{rig}}^0(\text{Spec } k(x)/K, \tilde{i}_x^*(E))] \end{aligned}$$

est un  $K(x)$ -espace vectoriel [resp.  $K$ -espace vectoriel] de dimension finie muni d'un isomorphisme de Frobenius

$$(4.1.5) \quad \phi'_x = H_{\text{rig}}^o(i_x^*(\phi))$$

$$\begin{aligned} & [\text{resp.} \\ (4.1.6) \quad & \tilde{\phi}'_x = H_{\text{rig}}^o(\tilde{i}_x^*(\phi))] . \end{aligned}$$

Posons

$$(4.1.7) \quad M := \Gamma(\mathcal{X}_K^{an}, E|_X), \phi_M := \Gamma(\mathcal{X}_K^{an}, \phi_{E|_X})$$



où  $X = \text{Spec } A_0$ ,  $\mathcal{X} = \text{Spec } A$ ; alors  $M \in F^a\text{-Mod}(A_K^\dagger)$ , et la fibre  $M_x$  de  $M$  en  $x \in |X|$  est par définition (cf. (1.3.1))

$$(4.1.8) \quad M_x := \tau_K^\dagger(x)^*(M)$$

et

$$\phi_M : M^\sigma := F_{A_K^\dagger}^*(M) \rightarrow M$$

induit (cf. (1.3.2))

$$(4.1.9) \quad \phi_x : \sigma_{K(x)}^*(M_x) \rightarrow M_x .$$

On montre, comme en (2.1.2), que l'on a une identification

$$(4.1.10) \quad (E_x, \phi'_x) \equiv (M_x, \phi_x) .$$

On déduit de (1.3.5) le lemme suivant :

**Lemme (4.1.11).** *Avec les notations de (4.1) on a, pour  $x \in |S|$ ,*

$$\det(1 - T \phi_x^{\deg x} | E_x) = \det(1 - T \tilde{\phi}_x^{\deg x} | \tilde{E}_x)^{1/\deg x} \in K[T] .$$

La définition de la fonction  $L(S, E, t)$  donnée ci-dessous ne dépend que du sous-schéma réduit sous-jacent à  $S$  : si l'on suppose  $S$  réduit on peut alors le décomposer en strates  $S_{ij}$ -affines et lisses sur  $k$  à la manière de 3.1 ; on dispose alors d'un foncteur naturel

$$(4.1.12) \quad \mathcal{D}^\dagger : F^a\text{-Isoc}^\dagger(S/K) \rightarrow Dw^\dagger(S, (S_{ij}), (\mathcal{S}_{ij}^\dagger), (F_{\mathcal{S}_{ij}^\dagger}))$$

$$E \longmapsto \mathcal{E}^\dagger = (\mathcal{E}, E_{ij}, \phi_{ij}^\dagger)$$

où  $\mathcal{E}$  est le  $F$ -isocristal convergent associé à  $E$ , et  $\phi_{ij}^\dagger : F_{A_{ij}^\dagger, K}^*(E_{ij}) \simeq E_{ij}$  est l'isomorphisme de Frobenius provenant de l'équivalence de Berthelot [B 3, cor (2.5.8)]. De manière imagée on dira qu'un  $F$ -isocristal surconvergent est toujours Dwork-surconvergent.

Comme conséquence de (4.1.11) on a :

**Définitions et proposition (4.1.13).** Soient  $S$  un  $k$ -schéma séparé de type fini,  $(E, \phi_E) \in F^a\text{-Isoc}^\dagger(S/K)$  et  $(\mathcal{E}, \phi_{\mathcal{E}}) \in F^a\text{-Isoc}(S/K)$  son image canonique par le foncteur d'oubli  $F^a\text{-Isoc}^\dagger(S/K) \rightarrow F^a\text{-Isoc}(S/K)$ . La fonction  $L$  de  $E$  est définie par

$$\begin{aligned} L(S, E, t) &= \prod_{x \in |S|} \det(1 - t^{\deg x} \phi_x^{\deg x} | E_x)^{-1} \in K[[t]] \\ &= \prod_{x \in |S|} \det(1 - t^{\deg x} \tilde{\phi}_x^{\deg x} | \tilde{E}_x)^{-1/\deg x} , \end{aligned}$$

et on a

$$L(S, E, t) = L(S, \mathcal{E}, t) .$$

On pose, pour  $\alpha \in \mathbb{Q}$  et  $r \in \mathbb{N}^*$

$$L_\alpha^{(r)}(S, E, t) = L_\alpha^{(r)}(S, \mathcal{E}, t)$$

$$L^{(r)}(S, E, t) = L^{(r)}(S, \mathcal{E}, t) .$$

**Remarques (4.1.14).**

- (i) La deuxième expression définissant  $L(S, E, t)$  à l'aide de  $\tilde{E}_x$  est celle qui avait été utilisée dans la définition de [E-LS 1] : la nouvelle définition donnée ici avec l'appui du lemme (1.3.5) coïncide donc avec celle de [E-LS 1].
- (ii) La fonction  $L(S, E, t)$  ci-dessus est  $p$ -adiquement méromorphe : ceci se déduit ou bien du théorème (1.3.8), ou bien du théorème 6.3 de [E-LS 1] qui fournit l'expression cohomologique

$$L(S, E, t) = \prod_{i=0}^{2 \dim S} \det(1 - t F | H_{\text{rig}, c}^i(S/K, E))^{(-1)^{i+1}} .$$

De plus cette expression cohomologique fournit la rationalité,  $L(S, E, t) \in K(t)$ , depuis que Kedlaya a prouvé la finitude de la cohomologie rigide à supports compacts et à coefficients dans  $E$  [Ked 1].

## 4.2. La conjecture de Dwork

**Théorème (4.2.1).** *Soient  $S$  un  $k$ -schéma séparé de type fini et  $(E, \phi_E) \in F^a\text{-Isoc}^\dagger(S/K)$ . Alors, pour tout rationnel  $\alpha$  et tout entier  $r \in \mathbb{N}^*$ , on a :*

- (i) *La fonction  $L_\alpha^{(r)}(S, E, t)$  est  $p$ -adiquement méromorphe*
- (ii) *La fonction  $L^{(r)}(S, E, t)$  est rationnelle*

$$L^{(r)}(S, E, t) \in K(t).$$

*Démonstration.*

Le (i) résulte de (3.2.10).

Le (ii) résulte de (4.1.14) (ii) et de la relation (3.2.4) :

$$L^{(r)}(S, E, t) = \prod_{i \geq 1} L(S, \text{Sym}^{r-i} E \otimes \bigwedge^i E, t)^{i \times (-1)^{i-1}}. \quad \square$$

## 4.3. La conjecture de Katz

Dans le théorème suivant nous levons l'hypothèse de prolongement à une compactification qui avait été faite dans [E-LS 2, théo 6.7] pour résoudre la conjecture de Katz.

On note  $\bar{k}$  une clôture algébrique de  $k = \mathbb{F}_q$ .

**Théorème (4.3.1).** *Soient  $X$  un schéma séparé de type fini sur  $\mathbb{F}_q$ ,  $X_{\bar{k}} = X \times_k \bar{k}$  et  $\mathcal{F}_{\mathbb{Q}}$  un  $K^\sigma$ -faisceau lisse sur  $X$ . On suppose que le  $F$ -isocristal convergent unité  $\mathcal{E}$  associé à  $\mathcal{F}_{\mathbb{Q}}$  provient d'un  $F$ -isocristal surconvergent  $E$ ,  $\mathcal{E} = \hat{E}$ . Alors*

$$(4.3.1.1) \quad L(X, \mathcal{F}_{\mathbb{Q}}, t) = L(X, \mathcal{E}, t) \in K(t).$$

(4.3.1.2) *Le quotient*

$$L(X, \mathcal{F}_{\mathbb{Q}}, t) / \prod_i \det(1 - t \, F|H_{\text{ét},c}^i(X_{\bar{k}}, \mathcal{F}_{\mathbb{Q}}))^{(-1)^{i+1}}$$

*n'a ni zéro ni pôle sur la couronne unité  $|t|_p = 1$ .*

*Démonstration.* La première assertion est là pour mémoire. Pour la deuxième il suffit d'utiliser la suite exacte (2) du théorème (3.3.13) du IV et [E-LS 2,

prop 6.5].  $\square$

**Remarque (4.3.1.3).** En utilisant l'expression cohomologique [E-LS 1, 6.3] de  $L(X, \mathcal{F}_{\mathbb{Q}}, t) = L(X, E, t)$  rappelée en (4.1.13) (ii), c'est chaque terme du produit alterné figurant dans l'expression (4.3.1.2) qui peut être précisé, c'est-à-dire à  $i$  fixé, grâce à [E-LS 1, 6.5] et au [IV, (3.3.16)(2)].

Ceci apporte une précision à la démonstration de la conjecture de Katz faite par Emerton et Kisin dans [E-K 1].

On généralise (4.3.1.1) de la façon suivante.

**Théorème (4.3.2).** *Soient  $S$  un  $\mathbb{F}_q$ -schéma lisse et séparé,  $f : X \rightarrow S$  un  $k$ -morphisme propre et lisse satisfaisant aux hypothèses de [IV, (3.1)] ou [IV, (5.2)] et  $E, \mathcal{F}_{\mathbb{Q}}$  comme en (4.3.1). Alors, pour  $(i, r, \alpha) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* \times \mathbb{Q}$ , on a :*

$$(4.3.2.1) \quad L(X, \mathcal{F}_{\mathbb{Q}}, t) = \prod_i L(S, R^i f_{\text{rig}*}(E), t)^{(-1)^i} \in K(t),$$

*c'est-à-dire*

$$\prod_j \det(1-t F|H_{\text{rig},c}^j(X/K, E))^{(-1)^{j+1}} = \prod_{i,j} \det(1-t F|H_{\text{rig},c}^j(S/K, R^i f_{\text{rig}*}(E)))^{(-1)^{i+j+1}} \in K(t).$$

$$(4.3.2.2) \quad L^{(r)}(S, R^i f_{\text{rig}*}(E), t) \in K(t).$$

$$(4.3.2.3) \quad L_{\alpha}^{(r)}(S, R^i f_{\text{rig}*}(E), t) \text{ est } p\text{-adiquement méromorphe.}$$

$$(4.3.2.4) \quad L_0(S, R^i f_{\text{rig}*}(E), t) = L(S, R^i f_{\text{et}*}(\mathcal{F}_{\mathbb{Q}}), t).$$

(4.3.2.5) *Si de plus  $\mathcal{F}$  est un  $\mathcal{V}^{\sigma}$ -faisceau lisse tel que  $\mathcal{F}_{\mathbb{Q}} = \mathcal{F} \otimes \mathbb{Q}$ , alors le quotient*

$$L(S, R^i f_{\text{rig}*}(E), t) / \prod_j \det(1-t F|H_{\text{et},c}^j(S_{\bar{k}}, R^i f_{\text{et}*}(\mathcal{F}_{\mathbb{Q}})))^{(-1)^{j+1}}$$

*n'a ni zéro ni pôle dans la couronne unité  $|t|_p = 1$  (ni même dans le disque fermé  $|t|_p \leq 1$ ).*

*Démonstration.* Par définition on a

$$L(X, \mathcal{F}_{\mathbb{Q}}, t) = L(X, E, t),$$

et il suffit d'appliquer [IV, (3.1) ou (5.2)], (4.1.13) et (4.2.1); d'où les trois premières assertions.

Pour (4.3.2.4) on utilise la suite exacte de [V, (3.3.13.3)] et (E-LS 2, (6.2)).

Pour (4.3.2.5) on pose  $E^i = R^i f_{\text{rig}*}(E)$ ,  $L_0(t) = L_0(S, E^i, t)$ ,  $L_{>0}(t) = L(S, E^i, t)/L_0(t)$ .

Par définition on a

$$\begin{aligned} L(S, E^i, t) &= \prod_{s \in |S|} (\det(1 - t^{\deg s} F_s | H_{\text{rig}*}^i(X_s/K(s), E|_{X_s})))^{-1} \\ &=: \prod_{s \in |S|} (P_s(t))^{-1}. \end{aligned}$$

Pour chaque  $s \in |S|$  l'injection  $k(s) \hookrightarrow \bar{k}$  s'étend en une injection

$$\mathcal{V}(s) := W(k(s)) \otimes_{W(k)} \mathcal{V} \hookrightarrow \bar{\mathcal{V}} := W(\bar{k}) \otimes_{W(k)} \mathcal{V},$$

et on a

$$P_s(t) \in \mathcal{V}(s)[t] \subset \bar{\mathcal{V}}[t];$$

en effet, comme  $E$  provient d'un  $\mathcal{V}^\sigma$ -faisceau, le polynôme  $P_s$  est à coefficients dans  $\mathcal{V}(s)$  et pas seulement dans  $K(s) = \text{Frac}(\mathcal{V}(s))$ . Donc  $L(S, E^i, t)$ ,  $L_0(t)$  ainsi que leurs inverses sont éléments de  $\bar{\mathcal{V}}[[t]]$  : par suite ils convergent tous les quatre dans le disque ouvert  $|t|_p < 1$  ; de plus, par définition de  $L_0(t)$  on en déduit que  $L_{>0}(t)$  et  $1/L_{>0}(t)$  convergent dans le disque fermé  $|t|_p \leq 1$ . Or d'après [E-K 1], le quotient

$$L(S, R^i f_{\text{et}*}(\mathcal{F}_{\mathbb{Q}}), t) / \prod_j \det(1 - t F | H_{\text{et},c}^j(S_{\bar{k}}, R^i f_{\text{et}*}(\mathcal{F}_{\mathbb{Q}})))^{(-1)^{j+1}}$$

converge ainsi que son inverse dans le disque  $|t|_p \leq 1$  ; d'où (4.3.2.5) via (4.3.2.4).  $\square$

## 5. Schémas abéliens ordinaires

On suppose  $e \leq p - 1$ .

Dans ce paragraphe 5 nous allons expliciter l'expression  $L_\alpha^{(r)}(S, R^i f_{\text{cris}*}(\mathcal{O}_{X/W}), t)$  lorsque  $f : X \rightarrow S$  est un schéma abélien ordinaire.

Après des rappels en 5.1 sur les  $F$ -cristaux ordinaires, et en 5.2 sur les schémas ordinaires, nous caractérisons en (5.2.9) les schémas abéliens ordinaires. Nous revenons ensuite en 5.3, théorème (5.3.1), à l'expression de  $L_\alpha^{(r)}$ .

### 5.1. $F$ -cristaux ordinaires

Soient  $k$  un corps de caractéristique  $p > 0$ ,  $S$  un  $k$ -schéma,  $E \in F^a\text{-Cris}(S/\mathcal{V})$  un  $F^a$ -cristal localement libre de type fini sur  $(S/\mathcal{V})$ .

A la suite de Katz et Deligne [K 2, II, 2.4, Rks p 148], [Del 2], on dit que  $E$  est un  **$F^a$ -cristal ordinaire de niveau  $n$**  s'il existe une filtration de  $E$  par des sous  $F^a$ -cristaux localement libres de type fini

$$(5.1.1) \quad 0 \subset U_0 \subset U_1 \subset \dots \subset U_{i-1} \subset U_i \subset \dots \subset U_n = E$$

tels que  $U_i/U_{i-1}$  soit de la forme  $V_i(-i) := (E_i, \nabla_i, \pi^i F_i)$ , où  $V_i := (E_i, \nabla_i, F_i)$  est un  $F^a$ -cristal unité :  $V_i$  sera noté  $E_i$  dans la suite. On dit que  $E \in F^a\text{-Cris}(S/\mathcal{V})$  est **ordinaire** s'il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $E$  soit ordinaire de niveau  $n$ .

Pour les définitions et propriétés des polygones de Hodge et de Newton de  $E$  nous renvoyons le lecteur à [K 2, I, 1.2, 1.3 et 2.3 p 142].

Si  $k$  est parfait et  $E \in F^a\text{-Cris}(S/\mathcal{V})$  est ordinaire, il est clair qu'en tout point  $s \in S$  les polygones de Hodge et de Newton de  $E$  coïncident et qu'ils sont constants, i.e. indépendants de  $s \in S$  [loc. cit.]. La réciproque est vraie si  $S$  est un schéma sur un corps parfait  $k$  de caractéristique  $p > 0$  et  $S$  de l'un des deux types suivants [K 2, II, 2.4 Rks p 148], [W 2, lemma 3.6], [W 3, theo 7.2, cor 7.3] :

- (i)  $S$  est lisse sur  $k$ ,
- (ii)  $S = \text{Spec } k[[X_1, \dots, X_d]]$ .

Lorsque  $k = \mathbb{F}_q$  et que  $E$  est ordinaire de niveau  $n$ , on a :

$$(5.1.2) \quad L(S, E, t) = \prod_{i=0}^n L(S, E_i, \pi^i t).$$

**Proposition (5.1.3).** *Si  $A_0$  est une  $\mathbb{F}_q$ -algèbre lisse, la catégorie des objets ordinaires de  $F^a\text{-Cris}(\text{Spec } A_0/\mathcal{V})$  est stable par puissances tensorielles, puissances symétriques et puissances extérieures.*

*Démonstration.* Il suffit de raisonner avec des bases locales de  $E \in F^a\text{-Cris}(\text{Spec } A_0/\mathcal{V})$  et d'appliquer [K 2] ou [W 2, discussion après def 3.3].  $\square$

## 5.2. Caractérisation des schémas abéliens ordinaires

**Définition (5.2.1) [Il 2].** *Soient  $S$  un schéma de caractéristique  $p > 0$  et  $f : X \rightarrow S$  un morphisme propre et lisse. On dit que  $X$  est ordinaire sur  $S$  si*

$$R^j f_* B\Omega_{X/S}^i = 0$$

*pour tout  $i$  et tout  $j$  ( $B\Omega_{X/S}^i$  désigne le sous-faisceau de  $\Omega_{X/S}^{i-1}$  de  $\Omega_{X/S}^i$ , et les  $R^j f_*$  sont calculés pour la topologie de Zariski).*

On a la caractérisation suivante :

**Proposition (5.2.2).** *Soient  $S$  un schéma de caractéristique  $p > 0$  et  $f : X \rightarrow S$  un morphisme propre et lisse. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (1)  *$X$  est ordinaire sur  $S$ .*
- (2) *Pour tout  $s \in S$ ,  $X_s$  est ordinaire sur  $\text{Spec } k(s)$ .*
- (3) *Pour tout point fermé  $s \in |S|$ ,  $X_s$  est ordinaire sur  $\text{Spec } k(s)$ .*
- (4) *Pour tout  $s \in S$ , localité d'un point géométrique  $\bar{s} = \text{Spec } \overline{k(s)}$  (où  $\overline{k(s)}$  est une clôture algébrique de  $k(s)$ ),  $X_{\bar{s}}$  est ordinaire sur  $\text{Spec } \overline{k(s)}$ .*

*Démonstration.*

L'équivalence de (1) et (2) résulte de [Il 2, 1.2(b)].

Montrons que (3)  $\Rightarrow$  (1). Notons  $|S|$  l'ensemble des points fermés de  $S$  : on suppose donc que, pour tout  $s \in |S|$ ,  $X_s$  est ordinaire sur  $k(s)$ . D'après [Bour, AC II, § 3, no 3, théo 1] il s'agit de vérifier que pour tout  $i, j$  et

tout  $s \in |S|$  on a  $(R^i f_* B\Omega_{X/S}^i) \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S,s} = 0$ ; par platitude de  $\mathcal{O}_{S,s}$  sur  $\mathcal{O}_S$  c'est équivalent à montrer que  $(\mathbb{R}f_* B\Omega_{X/S}^i) \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S,s} = 0$ , ce qui résulte de l'implication (i)  $\Rightarrow$  (iii) de [Il2, 1.2 (b)].

L'implication (2)  $\Rightarrow$  (4) s'obtient par le changement de base  $k(s) \rightarrow \overline{k(s)}$  [Il 2, 1.2 (a)].

Réciproquement, montrons (4)  $\Rightarrow$  (2). Soit  $s \in S$ , alors  $X_{\overline{s}}$  est ordinaire par hypothèse, d'où par définition [Il 2, 1.1]

$$\mathbb{R}g_* B\Omega_{X_{\overline{s}}/\overline{s}}^i = 0$$

où  $g : X_{\overline{s}} \rightarrow \text{Spec } \overline{k(s)}$  est le morphisme structural, déduit de  $f : X_s \rightarrow \text{Spec } k(s)$ . Or d'après [Il 2, (\*) p 379] on a

$$0 = \mathbb{R}g_* B\Omega_{X_{\overline{s}}/\overline{s}}^i \xleftarrow{\sim} (\mathbb{R}f_* B\Omega_{X_s/s}^i) \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{k(s)} \overline{k(s)} ;$$

donc par fidèle platitude de  $\overline{k(s)}$  sur  $k(s)$  on obtient

$$\mathbb{R}f_* B\Omega_{X_s/s}^i = 0 ,$$

ce qui est l'ordinarité de  $X_s$  sur  $k(s)$ .  $\square$

Nous adopterons la définition suivante due à Raynaud [R 3, Rq 4.2.2] :

**Définition (5.2.3).** *Un groupe  $p$ -divisible  $G$  est dit ordinaire s'il est extension d'un groupe  $p$ -divisible étale par un groupe  $p$ -divisible de type multiplicatif.*

Pour un groupe  $p$ -divisible  $G$  sur un schéma  $S$  on note, pour tout entier  $n$ ,  $G(n) := \text{Ker}\{p^n : G \rightarrow G\}$ . Le dual de Cartier  $G^*$  de  $G$  est défini par

$$G^* = \varinjlim_n (G(n))^*, \text{ où } (G(n))^* := \text{Hom}(G(n), \mathbb{G}_m) ;$$

le dual de Pontryagin  $G^\vee$  de  $G$  est défini par  $G^\vee := \varinjlim_n (G(n))^\vee$ , où  $(G(n))^\vee := \text{Hom}(G(n), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ .

Si  $S$  est localement annulé par une puissance de  $p$  on note  $\mathbb{D}(G)$  son cristal de Dieudonné [B-M 1], [B-B-M]. Rappelons que  $G$  est infinitésimal sur  $S$  si, pour tout entier  $n$ , le morphisme structural  $G(n) \rightarrow S$  est radiciel [Me, I, 3.2].



**Lemme (5.2.4).** *Soient  $S$  un schéma de caractéristique  $p > 0$  et  $G$  un groupe  $p$ -divisible de type multiplicatif. Alors  $G$  est infinitésimal sur  $S$  et son dual de Cartier  $G^*$  est à fibres unipotentes.*

*Démonstration.* Comme le caractère radiciel se vérifie fibre à fibre [EGA I, 3.7.4] nous supposons que  $S$  est spectre d'un corps. Pour tout  $n$ , le Verschiebung  $V$  de  $G(n)$  est un isomorphisme et le  $n^{\text{ième}}$  itéré de son Frobenius  $F$ , donné par  $F^n = p^n(V^{-1})^n$ , est nul : donc  $G(n)$  est infinitésimal et son dual de Cartier  $(G(n))^*$  est unipotent [D-G, IV, § 3, no 5.3].  $\square$

Pour un schéma  $S$  localement annulé par une puissance de  $p$  et  $\Sigma = \text{Spec } \mathbb{Z}_p$ , on note [B-M 1, § 6], [B-M 2, 2.4]  $C_S$  la catégorie des cristaux localement de présentation finie sur  $\text{CRIS}(S/\Sigma)$ , munis d'homomorphismes

$$F : E^\sigma \rightarrow E \quad , \quad V : E \rightarrow E^\sigma$$

tels que  $F \circ V = p$ ,  $V \circ F = p$ , et  $C_S^{\text{ét}}$  (resp.  $C_S^{\text{tm}}$ ) la sous-catégorie pleine de  $C_S$  formée des cristaux localement annulés par une puissance de  $p$ , et pour lesquels  $F$  (resp.  $V$ ) est un isomorphisme.

**Proposition (5.2.5).** *Soient  $S$  un schéma de caractéristique  $p > 0$  et  $H$  un groupe  $p$ -divisible de type multiplicatif sur  $S$  (i.e.  $V$  est un isomorphisme). Alors on a un isomorphisme de  $F$ -cristaux*

$$\mathbb{D}(H) \simeq \mathbb{D}(H^{*\vee})(-1) \quad ,$$

où  $(\ )^*$  est la dualité de Cartier,  $(\ )^\vee$  la dualité de Pontryagin des groupes  $p$ -divisibles étales et  $(-1)$  le twist à la Tate.

*Démonstration.* Avec les notations de [B-M 2, 2.2.3.1] on a

$$\mathbb{D}(H) \simeq \underline{H}^* \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{S/\Sigma} \quad \text{et} \quad F_{\mathbb{D}(H)} = p(F_{\underline{H}^*})^{-1} \otimes 1 \quad ;$$

de même [B-M 2, (2.1.3.1) et (2.1.4) (ii)] on a

$$\mathbb{D}(H^{*\vee}) \simeq \underline{H}^* \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{S/\Sigma} \quad \text{et} \quad F_{\mathbb{D}(H^{*\vee})} = (F_{\underline{H}^*})^{-1} \otimes 1 \quad ,$$

d'où la proposition.  $\square$

**Proposition (5.2.6).** *Soient  $S$  un schéma de caractéristique  $p > 0$  et  $E$  un élément de  $C_S$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (1)  *$E$  est un  $F$ -cristal ordinaire de niveau 1 [cf. (5.1)].*
- (2) *Il existe un groupe  $p$ -divisible étale  $G^{\text{ét}}$  sur  $S$  et un groupe  $p$ -divisible de type multiplicatif  $G^{\text{tm}}$  sur  $S$  tels que  $E$  soit extension de  $\mathbb{D}(G^{\text{tm}})$  par  $\mathbb{D}(G^{\text{ét}})$ .*

*Démonstration.* Ceci résulte de la définition (5.1), de la proposition (5.2.5) précédente et des équivalences de catégories de [B-M 1, corollaire du théorème 6].  $\square$

**Proposition (5.2.7).** *Soient  $S$  un schéma de caractéristique  $p > 0$ , normal, localement irréductible et possédant localement une  $p$ -base et  $G$  un groupe  $p$ -divisible sur  $S$ . Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (1)  $G$  est un groupe  $p$ -divisible ordinaire.
- (2)  $\mathbb{D}(G)$  est un  $F$ -cristal ordinaire de niveau 1.

*Démonstration.* Si  $G$  est ordinaire, on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow G^{tm} \longrightarrow G \longrightarrow G^{\text{ét}} \longrightarrow 0$$

où  $G^{\text{ét}}$  est un groupe  $p$ -divisible étale et  $G^{tm}$  un groupe  $p$ -divisible de type multiplicatif, ce qui fournit une suite exacte [B-M 1, § 4.1 a)]

$$0 \longrightarrow \mathbb{D}(G^{\text{ét}}) \longrightarrow \mathbb{D}(G) \longrightarrow \mathbb{D}(G^{tm}) \longrightarrow 0 ,$$

donc  $\mathbb{D}(G)$  est ordinaire de niveau 1 par la proposition (5.2.6) précédente.

Réciproquement, supposons que  $\mathbb{D}(G)$  est un  $F$ -cristal ordinaire de niveau 1, i.e. par la proposition (5.2.6) (dont nous adoptons les notations), que  $\mathbb{D}(G)$  est extension de  $\mathbb{D}(G^{tm})$  par  $\mathbb{D}(G^{\text{ét}})$ . Sous nos hypothèses, le foncteur  $\mathbb{D}$  est pleinement fidèle [B-M 2, théo (4.1.1)], donc la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbb{D}(G^{\text{ét}}) \longrightarrow \mathbb{D}(G) \longrightarrow \mathbb{D}(G^{tm}) \longrightarrow 0 ,$$

fournit une suite exacte

$$0 \longrightarrow G^{tm} \longrightarrow G \longrightarrow G^{\text{ét}} \longrightarrow 0,$$

et  $G$  est ordinaire.  $\square$

**Remarques (5.2.8) sur la proposition (5.2.7).**

- (1) Les hypothèses sur  $S$  sont satisfaites si  $S$  est un schéma sur un corps  $k$  de caractéristique  $p > 0$  tel que  $S$  est de l'un des deux types suivants [B-M 1, § 6] :
  - (i)  $S$  est lisse sur  $k$ .
  - (ii)  $S = \text{Spec } k[[X_1, \dots, X_n]]$ , avec  $[k : k^p] < +\infty$ .
- (2) Le (1) de la proposition implique le (2) en supposant seulement que  $S$  est un  $k$ -schéma ; ce n'est que pour la réciproque que nos hypothèses sur  $S$  sont utiles.

**Théorème (5.2.9).** *Soient  $S$  un schéma de caractéristique  $p$ ,  $f : X \rightarrow S$  un schéma abélien de dimension relative  $d$ ,  $G$  le groupe  $p$ -divisible associé à  $X/S$  et  $\mathbb{D}(G)$  son cristal de Dieudonné [B-B-M]. Alors les propriétés (1) à (5) ci-dessous sont équivalentes :*

- (1)  $X$  est ordinaire sur  $S$ .
- (2) *Pour tout point géométrique  $\bar{s}$  de  $S$  le polygone de Newton  $Nwt_n$  défini par les pentes de Frobenius agissant sur le groupe de cohomologie cristalline  $H_{cris}^n(X_{\bar{s}}/W(k(\bar{s})))$  coïncide, pour tout  $n$ , avec le polygone de Hodge  $Hdg_n$  défini par les nombres de Hodge*

$$h^{i,n-i} = \dim_{k(\bar{s})} H^{n-i}(X_{\bar{s}}, \Omega_{X_{\bar{s}}/k(\bar{s})}^i)$$

*(i.e ayant pour pente  $i$  avec la multiplicité  $h^{i,n-i}$ ).*

- (3) *Pour tout point géométrique  $\bar{s}$  de  $S$ , le  $p$ -rang de  $X_{\bar{s}}$  est  $d$  (par définition le  $p$ -rang est égal à  $\dim_{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}(H_{\acute{e}t}^1(X_{\bar{s}}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}))$ ).*
- (4)  $G$  est ordinaire.
- (5) *Le  $F$ -cristal de Dieudonné  $\mathbb{D}(G) \simeq \mathbb{D}(X) := R^1 f_{cris*}(\mathcal{O}_{X/\Sigma})$  est ordinaire de niveau 1.*

*Si de plus  $S$  est un schéma sur un corps parfait  $k$  de caractéristique  $p > 0$  et si  $S$  est de l'un des deux types suivants :*

- (i)  $S$  est lisse sur  $k$ ,
- (ii)  $S = \text{Spec } k[[t_1, \dots, t_n]]$ ,

*alors ces propriétés équivalent aussi à :*

- (6) *Pour tout  $i$ ,  $0 \leq i \leq 2d$ , le  $F$ -cristal  $R^i f_{cris*}(\mathcal{O}_{X/\Sigma}) = R^i f_{cris*}(\mathcal{O}_{X/W(k)})$  est ordinaire de niveau  $i$ .*

*Démonstration.* L'équivalence de (1), (2) et (3) résulte du (4) de la proposition (5.2.2) de [Il 2, § 1] et [B-K, 7.2, 7.3, 7.4].

Montrons que (1)  $\Rightarrow$  (4). Soient  $s = \text{Spec } k(s)$  un point de  $S$  et  $\bar{s} = \text{Spec } \bar{k}(s)$ , où  $\bar{k}(s)$  est une clôture algébrique de  $k(s)$ . Comme  $X$  est ordinaire sur  $S$ ,  $X_{\bar{s}}$  est une variété abélienne ordinaire [Il 2, 1.2 (a)] au sens usuel ([Il 2, 1.1] et [B-K, 7.2 et 7.4]), donc le  $p$ -rang de  $X_{\bar{s}}$  [Mu, p. 147] est  $d$  [B-K, 7.4] : par suite [Mu, p. 147], sur le corps  $\bar{k}(s)$ , le groupe  $p$ -divisible  $G_{\bar{s}}$  est le produit d'un groupe  $p$ -divisible étale  $G_{\bar{s}}^{\acute{e}t}$  par un groupe  $p$ -divisible de type multiplicatif  $G_{\bar{s}}^{tm}$  ; par dualité de Cartier on a aussi  $G_{\bar{s}}^* \simeq G_{\bar{s}}^{tm*} \times G_{\bar{s}}^{\acute{e}t*}$ . Or le rang séparable de  $G(1)_s$  [EGA I, 6.5.9] est aussi celui de  $G(1)_{\bar{s}}$  [EGA I, 6.5.11], et comme  $G^{tm}$  est infinitésimal [lemme (5.2.4)] ce rang séparable de  $G(1)_{\bar{s}}$  est le rang de  $G(1)_{\bar{s}}^{\acute{e}t}$ , qui est égal à  $p^d$  puisque  $X_{\bar{s}}$  est ordinaire [Mu, p. 147]. Ainsi la fonction  $s \mapsto \text{rang séparable de } G(1)_s$  (resp. de  $G(1)_s^*$ ) est

constante : par [Me, II, prop 4.9]  $G$  (resp.  $G^*$ ) est extension d'un groupe  $p$ -divisible étale  $G''$  (resp.  $(G^*)''$ ) par un groupe  $p$ -divisible infinitésimal  $G'$  (resp.  $(G^*)'$ ). La dualité de Cartier préservant les suites exactes, on a les deux suites exactes :

$$(S1) \quad 0 \longrightarrow ((G^*)'')^* \xrightarrow{i} G \longrightarrow ((G^*)')^* \longrightarrow 0$$

$$(S2) \quad 0 \longrightarrow G' \longrightarrow G \xrightarrow{j} G'' \longrightarrow 0.$$

Comme  $(G'')^*$  est de type multiplicatif, il est infinitésimal [lemme (5.2.4)] donc  $G''$  est à fibres unipotentes [D-G, IV, § 3, no 5.3] : il résulte alors de [SGA 3, XVII, § 2, lemme 2.5] que le morphisme composé  $j \circ i$  est nul. Par suite, l'identité de  $G$  induit un morphisme de la suite exacte (S1) dans la suite exacte (S2) ; soit  $f : ((G^*)')^* \rightarrow G''$  le morphisme induit. Pour tout entier  $n$ , le morphisme  $G(n) \rightarrow G''(n)$  est un épimorphisme de  $S$ -schémas en groupes, donc il est fidèlement plat : en effet, par le critère de platitude fibre par fibre [EGA IV, 11.3.11] on est ramené au cas où  $S$  est le spectre d'un corps, et alors le résultat est standard [D-G, III, § 3, 7.4]. De la même façon  $G(n) \rightarrow ((G^*(n))')^*$  est fidèlement plat, donc  $f$  est fidèlement plat [EGA IV, 2.2.13] : montrons que  $f$  est un isomorphisme, i.e. que pour tout  $n$ ,  $f_n : ((G^*(n))')^* \rightarrow G''(n)$  est un isomorphisme. Pour cela on peut supposer que  $S$  est le spectre  $s$  d'un corps  $k$  [EGA IV, 17.9.5], et même que  $k = \bar{k}$  est algébriquement clos, par fidèle platitude de  $\bar{k}$  sur  $k$  [EGA IV, 2.7.1, (viii)]. Mais alors  $(G_s^*)' \simeq G_s^{\text{ét}*}$ , d'où  $((G_s^*)')^* \simeq G_s^{\text{ét}}$  qui est de hauteur  $ht(G_s^{\text{ét}}) = d$  car  $X_{\bar{s}}$  est ordinaire ; de même  $G''_s \simeq G_s^{\text{ét}}$  et  $f_n$  induit un morphisme fidèlement plat  $f_{n,\bar{s}} : G_s^{\text{ét}}(n) \rightarrow G''_s(n)$  : c'est donc un isomorphisme puisqu'au niveau des anneaux il fournit une injection entre  $\bar{k}$ -espaces vectoriels de même dimension  $p^{nd}$ . Ainsi  $f$  est un isomorphisme et l'identité de  $G$  induit un isomorphisme

$$((G^*)'')^* \xrightarrow{\sim} G' ;$$

puisque  $(G^*)''$  est étale,  $G'$  est de type multiplicatif et donc  $G$  est ordinaire.

L'implication (4)  $\Rightarrow$  (5) provient de la remarque (2) de (5.2.8).

Montrons que (5)  $\Rightarrow$  (3). Supposant (5) on a une suite exacte de cristaux sur  $S$  [prop (5.2.6)]

$$0 \longrightarrow \mathbb{D}(G^{\text{ét}}) \longrightarrow \mathbb{D}(G) \longrightarrow \mathbb{D}(G^{tm}) \longrightarrow 0 ,$$

qui, pour tout point géométrique  $\bar{s}$  de  $S$ , reste exacte par image inverse sur  $\text{Spec } k(\bar{s})$  et s'identifie [B-B-M, 1.3.3] à

$$0 \longrightarrow \mathbb{D}(G_{\bar{s}}^{\text{ét}}) \longrightarrow \mathbb{D}(G_{\bar{s}}) \longrightarrow \mathbb{D}(G_{\bar{s}}^{tm}) \longrightarrow 0 .$$

Le corps  $k(\bar{s})$  vérifiant les hypothèses de la proposition (5.2.7) on en déduit une suite exacte

$$0 \longrightarrow G_{\bar{s}}^{tm} \longrightarrow G_{\bar{s}} \longrightarrow G_{\bar{s}}^{\text{ét}} \longrightarrow 0 ,$$

qui est scindée puisque  $k(\bar{s})$  est parfait. Ainsi la composante infinitésimale unipotente de  $G_{\bar{s}}$  est nulle [Dem, p.39] ; grâce à [Mu, p. 147] on en déduit que le  $p$ -rang de  $X_{\bar{s}}$  est  $d$ , et ceci pour tout point géométrique  $\bar{s}$ , d'où le (3).

Il reste à établir l'implication (5)  $\Rightarrow$  (6). Sous les conditions de l'énoncé l'ordinarité se vérifie sur les polygones de Hodge et de Newton de  $R^i f_{\text{cris}*}(\mathcal{O}_{S/\Sigma})$  en chaque point  $s \in S$  [cf. (5.1)] : la coïncidence de ces polygones pour un  $i$ ,  $0 \leq i \leq 2d$ , résulte de leur coïncidence pour  $i = 1$  [K 2, I, 1.2, 1.3], car on a un isomorphisme [B-B-M, (2.5.5.1)]

$$R^i f_{\text{cris}*}(\mathcal{O}_{S/\Sigma}) \simeq \mathop{\Lambda}\limits^i R^1 f_{\text{cris}*}(\mathcal{O}_{S/\Sigma}) .$$

L'assertion sur le niveau est claire.  $\square$

### 5.3. Explicitation des fonctions $L_{\alpha}^{(r)}$ et conjecture de Dwork

On reprend les hypothèses et notations du § 4. Ainsi  $k = \mathbb{F}_q$  et  $S$  est un  $k$ -schéma séparé de type fini. On supposera dorénavant que  $f : X \longrightarrow S$  est un schéma abélien ordinaire de dimension relative  $g$ , de groupe  $p$ -divisible  $G$  : par le théorème (5.2.9),  $G$  est extension d'un groupe  $p$ -divisible étale  $G^{\text{ét}}$  par un groupe  $p$ -divisible de type multiplicatif  $G^{tm}$ .

Nous omettrons dorénavant  $S$  et  $t$  dans l'écriture des fonctions  $L$ , par exemple  $L_{\alpha}(E) := L_{\alpha}(S, E, t)$  pour  $\alpha \in \mathbb{Q}$ .

**Théorème (5.3.1).** *Sous les hypothèses 5.3 on a, pour tout  $i$ ,  $0 \leq i \leq 2g$  :*

$$(1) \quad (1.1) \quad L_0(R^i f_{\text{cris}*}(\mathcal{O}_{X/W})) = L(R^i f_{\text{ét}*}(\mathbb{Z}_p) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{X/W}) , \text{ où}$$

$$R^i f_{\text{ét}*}(\mathbb{Z}_p) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{X/W} \simeq \mathop{\Lambda}\limits^i \mathbb{D}(G^{\text{ét}})$$

*est le sous  $F$ -cristal unité de  $R^i f_{\text{cris}*}(\mathcal{O}_{X/W})$ .*

$$(1.2) \quad L_i(R^i f_{\text{cris}*}(\mathcal{O}_{X/W})) = L(\mathop{\Lambda}\limits^i \mathbb{D}(G^{tm})) .$$

$$(1.3) \quad L_\alpha(R^i f_{\text{cris}*}(\mathcal{O}_{X/W})) = 1 \text{ si } \alpha < 0 \text{ ou } \alpha > i, \text{ ou } \alpha \in [0, i] \setminus \mathbb{N},$$

$$= L((\overset{i-\alpha}{\Lambda} \mathbb{D}(G^{\text{ét}})) \otimes (\overset{\alpha}{\Lambda} \mathbb{D}(G^{tm}))) \text{ si } \alpha \in [0, i] \cap \mathbb{N}.$$

(2) Pour tout  $\alpha \in \mathbb{Q}$  et  $r \in \mathbb{N}^*$  on a :

$$(2.1) \quad L_\alpha^{(r)}(R^i f_{\text{cris}*}(\mathcal{O}_{X/W})) \text{ est } p\text{-adiquement méromorphe.}$$

$$(2.2) \quad L_\alpha^{(r)}(R^i f_{\text{cris}*}(\mathcal{O}_{X/W})) = 1 \text{ si } \alpha < 0, \text{ ou } \alpha > i, \text{ ou } \alpha \in [0, i] \setminus \mathbb{N}.$$

$$(2.3) \quad L_\alpha^{(r)}(R^i f_{\text{cris}*}(\mathcal{O}_{X/W})) =$$

$$\prod_{j \geq 1} L\{Sym^{r-j}[(\overset{i-\alpha}{\Lambda} \mathbb{D}(G^{\text{ét}})) \otimes (\overset{\alpha}{\Lambda} \mathbb{D}(G^{tm}))] \otimes \overset{j}{\Lambda}[(\overset{i-\alpha}{\Lambda} \mathbb{D}(G^{\text{ét}})) \otimes (\overset{\alpha}{\Lambda} \mathbb{D}(G^{tm}))]\}^{j \times (-1)^{j-1}}$$

$$\text{si } \alpha \in [0, i] \cap \mathbb{N}.$$

*Démonstration.* Pour (1.1) on rappelle l'isomorphisme [B-B-M]

$$R^i f_{\text{cris}*}(\mathcal{O}_{X/W}) \simeq \overset{i}{\Lambda} R^1 f_{\text{cris}*}(\mathcal{O}_{X/W}) \simeq \overset{i}{\Lambda} \mathbb{D}(G),$$

et il résulte de [E-LS 2, prop 6.5] que

$$L_0(R^i f_{\text{cris}*}(\mathcal{O}_{X/W})) = L(R^i f_{\text{ét}*}(\mathbb{Z}_p)) ;$$

pour  $i = 1$ ,  $R^1 f_{\text{ét}*}(\mathbb{Z}_p)$  et  $\mathbb{D}(G^{\text{ét}})$  ont même fonction  $L$ , ce qui prouve (1.1).

Pour le (1.2) et (1.3) il suffit de remarquer que

$$L(R^1 f_{\text{cris}*}(\mathcal{O}_{X/W})) = L(\mathbb{D}(G)) = L(\mathbb{D}(G^{\text{ét}})) \times L(\mathbb{D}(G^{tm})).$$

Compte tenu de [Et 5, théo 8] le (2.1) est prouvé en (4.2.1)(i) ; (2.2) résulte de (1.3).

Pour le (2.3) on utilise l'expression (1.3) du théorème et la formule (3.2.5).

□



# Bibliographie

- [B 1] P. Berthelot : *Cohomologie cristalline des schémas de caractéristique  $p > 0$* , Lecture Notes in Math. 407, Springer (1974).
- [B 2] P. Berthelot : *Géométrie rigide et cohomologie des variétés algébriques de caractéristique  $p$* , Bulletin de la SMF, mémoire n° 23, t. 114 / fasc 2, (1986) 7-32.
- [B 3] P. Berthelot : *Cohomologie rigide et cohomologie rigide à supports propres*, Prépublication 93-03 de Rennes (1996).
- [B 4] P. Berthelot : *Finitude et pureté cohomologique en cohomologie rigide*, Invent. Math. 128, (1997) 329-377.
- [B 5] P. Berthelot : *Cohomologie rigide*, § 3, préprint (14/09/89) non publié.
- [B-B-M] P. Berthelot , L. Breen, W. Messing : *Théorie de Dieudonné cristalline II*, Lecture Notes in Math. 930, Springer (1982).
- [B-M 1] P. Berthelot, W. Messing : *Théorie de Dieudonné cristalline I*, Astérisque 63, (1979) 17-38.
- [B-M 2] P. Berthelot, W. Messing : *Théorie de Dieudonné cristalline III : théorèmes d'équivalence et de pleine fidélité*, The Grothendieck Festschrift, vol. 1, Progress in Math. 86, Birkhäuser (1990).
- [B-O] P. Berthelot, A. Ogus : *Notes on crystalline cohomology*, Math. Notes 21, Princeton University Press (1978).
- [B-K] S. Bloch, K. Kato :  *$p$ -adic étale cohomology*, Pub. Math. IHES, (1986) 107-152.
- [Bo] S. Bosch : *A rigid analytic version of M. Artin's theorem on analytic equations*, Math. Ann. 255, (1981) 395-404.
- [Bo-Dw-R] S. Bosch, B. Dwork, Ph. Robba : *Un théorème de prolongement pour des fonctions analytiques*, Math. Ann. 252 (1980) 165-173.
- [B-G-R] S. Bosch, U. Güntzer, R. Remmert : *Non-archimedean analysis*, Grundlehren der Math. Wissenschaften 261, Springer Verlag (1984).



- [Bo-Lü 1] S. Bosch, W. Lütkebohmert : *Formal and rigid geometry I. Rigid Spaces*, Math. Ann. 295, (1993) 291-317.
- [Bo-Lü 2] S. Bosch, W. Lütkebohmert : *Formal and rigid geometry II. Flattening techniques*, Math. Ann. 296, (1993) 403-429.
- [Bo-Lü-R] S. Bosch, W. Lütkebohmert, M. Raynaud : *Formal and rigid geometry III. The relative maximum principle*, Math. Ann. 302, (1995) 1-29.
- [Bour] N. Bourbaki : *Algèbre* [A] chap. I à VII; *Algèbre commutative* [AC] chap. I à X.
- [Ch] C.-L. Chai : *Siegel Moduli Schemes and Their Compactification over  $\mathbb{C}$* , in *Arithmetic Geometry*, Springer (1986), 231-251.
- [C] R. Crew : *F-isocrystals and p-adic representations in Algebraic Geometry, Bowdoin 1985*, Proceedings of Symposia in Pure Math., Vol. 46, AMS (1987), 111-138.
- [C-LS 1] B. Chiarellotto, B. Le Stum : *Sur la pureté de la cohomologie cristalline*, CRAS Paris, t. 326, série I, (1998), 961-963.
- [C-LS 2] B. Chiarellotto, B. Le Stum : *F-isocristaux unipotents*, Compositio Math. 116, (1999), 81-110.
- [C-T] B. Chiarellotto, N. Tsuzuki : *Cohomological descent of rigid cohomology for étale coverings*, Rendiconti Sem. Mat. Univ. Padova, Vol. 109, (2003).
- [Del 1] P. Deligne : *La conjecture de Weil II*, Pub. Math. IHES 52, (1980), 137-252.
- [Del 2] P. Deligne : *Cristaux ordinaires et coordonnées canoniques* in *Surfaces algébriques*, Lecture Notes in Math. 868, Springer (1981).
- [Dem] M. Demazure : *Lectures on p-divisible groups*, Lecture Notes in Math. 302, Springer (1972).
- [D-G] M. Demazure, P. Gabriel : *Groupes algébriques*, Masson, North-Holland (1970).
- [Dw 1] B. Dwork : *On Hecke polynomials*, Invent. Math. 12, (1971), 249-256.
- [Dw 2] B. Dwork : *Normalized period matrices II*, Annals of Math. 98, (1973), 1-57.
- [Dw-S] B. Dwork, S. Sperber : *Logarithmic decay and overconvergence of the unit root and associated zeta functions*, Annales Scient. Ec. Norm. Sup., 4ème série, t. 24, (1991), 575-604.

- [EGA] A. Grothendieck, J. Dieudonné : *Eléments de Géométrie Algébrique* : Chap. I, Springer Grundlehren 166 ; Chap. II, III, IV, Pub. Math. IHES n° 8, 11, 17, 20, 24, 28, 32.
- [Eis] D. Eisenbud : *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Math. 150, Springer, (1996).
- [El] R. Elkik : *Solutions d'équations à coefficients dans un anneau hensélien*, Annales Scient. Ec. Norm. Sup., 4ème série, t. 6, (1973), 553-604.
- [E-K 1] M. Emerton, M. Kisin : *Unit  $L$ -functions and a conjecture of Katz*, Annals of Math. (2) 153, (2001), 329-354.
- [E-K 2] M. Emerton, M. Kisin : *The Riemann-Hilbert correspondance for unit-  $F$ -crystals*, Astérisque 293, (2004), 1-257.
- [Et 1] J.-Y. Etesse : *Complexe de De Rham-Witt à coefficients dans un cristal*, Compositio Math. 66, (1988), 57-120.
- [Et 2] J.-Y. Etesse : *Rationalité et valeurs de fonctions  $L$  en cohomologie cristalline*, Annales Inst. Fourier, t. 38, fasc. 4, (1988), 33-92.
- [Et 3] J.-Y. Etesse : *Relèvement de schémas abéliens,  $F$ -cristaux et fonctions  $L$* , J. reine angew. Math. 535, (2001), 51-63.
- [Et 4] J.-Y. Etesse : *Relèvement de schémas et algèbres de Monsky-Washnitzer : théorèmes d'équivalence et de pleine fidélité*, Rendiconti Sem. Mat. Univ. Padova, Vol. 107, (2002), 111-138.
- [Et 5] J.-Y. Etesse : *Descente étale des  $F$ -isocristaux surconvergentes et rationalité des fonctions  $L$  de schémas abéliens*, Annales Scient. Ec. Norm. Sup., 4ème série, t. 35, (2002), 575-603.
- [Et 6] J.-Y. Etesse : *Introduction to  $L$ - functions of  $F$ -isocrystals*, in *Geometric Aspects of Dwork Theory*, Vol. II, de Gruyter, (2002), 701-710.
- [E-LS 1] J.-Y. Etesse, B. Le Stum : *Fonctions  $L$  associées aux  $F$ -isocristaux surconvergentes I : Interprétation cohomologique*, Math. Annalen 296, (1993), 557-576.
- [E-LS 2] J.-Y. Etesse, B. Le Stum : *Fonctions  $L$  associées aux  $F$ -isocristaux surconvergentes II : Zéros et pôles unités*, Invent. Math. 127, (1997), 1-31.
- [F-C] G. Faltings, C.-L. Chai : *Degeneration of Abelian Varieties*, Ergeb. der Math. 3. Folge, Vol. 22, Springer, (1990).
- [F-M] J.-M. Fontaine, W. Messing :  *$p$ -adic- periods and  $p$ -adic etale cohomology*, Contemporary Math. 67, Providence, AMS, (1987), 179-207.

- [G-K 1] E. Große-Klönne : *de Rham-Kohomologie in der rigiden Analysis*, Preprintreihe der Universität Münster SFB 478, Heft 39 (1999).
- [G-K 2] E. Große-Klönne : *Rigid analytic spaces with overconvergent structure sheaf*, Journal für die reine und angewandte Math. 519,(2000), 73-95.
- [G 1] A. Grothendieck : *Fondements de la Géométrie Algébrique*, Extraits du Séminaire Bourbaki 1957-1962, Secrétariat Mathématique (1962).
- [G 2] A. Grothendieck : *Formule de Lefschetz et rationalité des fonctions L*, Séminaire Bourbaki 279, dans *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, Masson, North-Holland, (1968).
- [G 3] A. Grothendieck : *le groupe de Brauer III*, dans *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, Masson, North-Holland, (1968).
- [H 1] R. Hartshorne : *Residues and Duality*, Lecture Notes in Math. 20, Springer (1966).
- [H 2] R. Hartshorne : *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Math. 52, Springer (1977).
- [Il 1] L. Illusie : *Complexe de De Rham-Witt et cohomologie cristalline*, Annales Scient. Ec. Norm. Sup., 4ème série, t. 12, (1979), 501-661.
- [Il 2] L. Illusie : *Ordinarité des intersections complètes générales*, Grothendieck Festschrift II, Progress in Math. 87, Birkhäuser (1990).
- [d.J] A.-J. de Jong : *Smoothness, semi-stability and alterations*, Pub. math. IHES 83 (1996), 51-93.
- [K 1] N. Katz : *Travaux de Dwork*, Séminaire Bourbaki 409, Lecture Notes in Math. 383, Springer (1972).
- [K 2] N. Katz : *Slope filtration of F-crystals*, Astérisque 63 (1979), 113-163.
- [K 3] N. Katz : *Nilpotent connections and the monodromy theorem : application of a result of Turritin*, Pub. Math. IHES 39(1970), 175-232.
- [K-M] N. Katz, W. Messing : *Some consequences of the Riemann hypothesis for varieties over finite fields*, Invent. Math. 23 (1974), 73-77.
- [K-O] N. Katz, T. Oda : *On the differentiation of the de Rham cohomology classes with respect to parameters*, J. Math. Kyoto Univ. 8 (1968), 188-213.

- [Ked 1] K. Kedlaya : *Finiteness of rigid cohomology with coefficients*, Preprint, arxiv : math.AG/0208027. Duke Math. J. 134 (2006), 15-97.
- [Ked 2] K. Kedlaya : *Full faithfulness for overconvergent  $F$ -crystals*, in *Geometric Aspects of Dwork Theory*, Vol. II, de Gruyter (2004), 819-835.
- [Ked 3] K. Kedlaya : *Semistable reduction for overconvergent  $F$ -isocrystals, I : Unipotence and logarithmic extensions*, Preprint, arxiv : math.NT/0405069 v3, 24 Jul 2005. Compositio Math. 143 (2007), 1164-1212.
- [LS] B. Le Stum : *PKU Course on rigid cohomology* Preprint 2006.
- [Lü] Lütkebohmert W. : *Formal-algebraic and rigid-analytic geometry*, Math. Ann. 286 (1990), 341-371.
- [M-T] S. Matsuda, F. Trihan : *Image directe supérieure et unipotence*, J. Reine Angew. Math. 569 (2004), 47-54.
- [Mer] D. Meredith : *Weak formal schemes*, Nagoya Math. J. 45 (1971), 1-38.
- [Me] W. Messing : *The crystals associated to Barsotti-Tate groups : with applications to abelian schemes*, Lecture Notes in Math. 264, Springer (1972).
- [Mi] J.-S. Milne : *Etale cohomology*, Princeton University Press (1980).
- [M-W] P. Monsky, G. Washnitzer : *Formal Cohomology I*, Annals of Math. 88, n° 2 (1968), 181-217.
- [Mu] D. Mumford : *Abelian varieties*, Oxford University Press (1974).
- [O 1] A. Ogus :  *$F$ -crystals and Griffiths transversality*, in *Proceedings of the International Symposium on Algebraic Geometry, Kyoto 1977*, Kinokuniya Book-Store (1977).
- [O 2] A. Ogus :  *$F$ -isocrystals and de Rham Cohomology II : convergent isocrystals*, Duke Math. J. 51 (1984), 765-850.
- [O 3] A. Ogus : *The convergent topos in characteristic  $p$* , in *Grothendieck Festschrift III*, Progress in Math. 88, Birkhäuser (1990).
- [O 4] A. Ogus :  *$F$ -crystals, Griffiths transversality and the Hodge decomposition*, Astérisque 221 (1994).
- [P] F. Pham : *Singularités des systèmes différentiels de Gauss-Manin*, Progress in Math. 2, Birkhäuser (1979).
- [vdP] M. van der Put : *The cohomology of Monsky and Washnitzer*, Bulletin de la SMF, mémoire n° 23, t. 114/fasc. 2 (1986), 33-60.

- [R 1] M. Raynaud : *Faisceaux amples sur les schémas en groupes et les espaces homogènes*, Lecture Notes in Math. 119, Springer (1970).
- [R 2] M. Raynaud : *Anneaux locaux henséliens*, Lecture Notes in Math. 169, Springer (1970).
- [R 3] M. Raynaud : *Schémas en groupes de type  $(p, \dots, p)$* , Bulletin de la SMF 102 (1974), 241-280.
- [R-G] M. Raynaud, L. Gruson : *Critères de platitude et de projectivité*, Invent. Math. 13 (1971), 1-89.
- [S 1] J.-P. Serre : *Exemples de variétés projectives en caractéristique  $p$  non relevables en caractéristique zéro*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 47 (1961), 108-109 : *Oeuvres complètes (Serre)*, Springer (1986-2000), vol. 2, n° 50, p. 98.
- [S 2] J.-P. Serre : *Corps locaux*, Hermann (1968).
- [Sha] S. Shatz : *Group Schemes, Formal groups, and  $p$ -divisible groups*, in *Arithmetic Geometry*, Springer (1986), 29-78.
- [Shi] A. Shiho : *Crystalline Fundamental Groups II- Log Convergent Cohomology and Rigid Cohomology*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo 9 (2002), 1-163.
- [SGA 1] A. Grothendieck : *Revêtements étales et groupe fondamental*, Lecture Notes in Math. 224, Springer (1971).
- [SGA 3] M. Demazure, A. Grothendieck : *Schémas en groupes*, Lecture Notes in Math. 151, 152, 153, Springer (1970).
- [SGA 4] M. Artin, A. Grothendieck, J.-L. Verdier : *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*, Lecture Notes in Math. 269, 270, 305, Springer (1972, 1973).
- [SGA 7, II] P. Deligne, N. Katz : *Groupes de Monodromie en Géométrie Algébrique*, Lecture Notes in Math. 340, Springer (1973).
- [T] J. Tate :  *$p$ -divisible groups*, Proceedings of a Conference on Local Fields in Driebergen 1966, Springer (1967), 158-183.
- [Tri] Trihan F. : *Image directe supérieure et unipotence*, Preprint University of Tokyo (2001).
- [Tsu 1] N. Tsuzuki : *On the Gysin isomorphism of rigid geometry*, Hiroshima Math. J. 29 (3), (1999), 479-527.
- [Tsu 2] N. Tsuzuki : *Morphisms of  $F$ -isocrystals and the finite monodromy theorem for unit-root  $F$ -isocrystals*, Duke Math. J. 111 (2002), 385-418.

- [Tsu 3] N. Tsuzuki : *Cohomological descent of rigid cohomology for proper coverings*, Invent. Math. 151 (2003), n° 1, 101-133.
- [Tsu 4] N. Tsuzuki : *On base change theorem and coherence in rigid cohomology*, Documenta Mathematica, Extra Volume : *Kazuya Kato's Fiftieth Birthday* (2003), 891-918.
- [W 1] D. Wan : *Meromorphic continuation of  $L$ -functions of  $p$ -adic representations*, Annals of Math. 143 (1996), 469-498.
- [W 2] D. Wan : *Dwork's conjecture on unit-root zeta functions*, Annals of Math. 150 (1999), 867-927.
- [W 3] D. Wan : *Higher rank case of Dwork's conjecture*, J. Amer. Math. Soc. 13 (2000), 807-852.
- [W 4] D. Wan : *Rank one case of Dwork's conjecture*, J. Amer. Math. Soc. 13 (2000), 853-908.